

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

14. Band, Heft 8 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 337—384

Algebra und Zahlentheorie.

Gravé, D.: Algorithmes du calcul des racines des équations algébriques. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 2, 3—20 (1936).

Verf. zeigt, daß das verallgemeinerte Newtonsche Verfahren $\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{1}{Q} \cdot \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$, wobei $Q > 1$, $Q > \left| \frac{f(\alpha) f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} \right|$ ist, stets konvergiert, und zwar eine der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liefert. Dabei macht er mehrere interessante geometrische Bemerkungen. Die Fläche $z = |f(x + iy)|$ hat die XY-Projektion ihrer courbe de la plus grande pente als Grenzlage der Folge $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, wenn $Q \rightarrow \infty$. — Diese Methode setzt die Existenz der Wurzeln nicht voraus, so daß sie auch als ein Existenzbeweis (Fundamentalsatz der Algebra) betrachtet werden kann. N. Tschebotarow.

Krein, M., et M. Neimark: Sur les applications de la bézoutiante aux questions de séparation des racines des équations algébriques. Trav. Univ. Odessa, Math. 1, 51—67 u. franz. Zusammenfassung 68—69 (1935) [Ukrainisch].

Sind $f(x)$, $g(x)$ zwei Polynome n -ten Grades, und ist

$$\frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{(x-y)} = \sum_{k,j=0}^{n-1} c_{kj} x^k y^j,$$

so hat Sylvester die quadratische Form $\sum_{k,j=0}^{n-1} c_{kj} x_k y_j$ Bézoutiante $B(f, g)$ von f, g genannt. — Die Verff. geben eine systematische Übersicht der mit Hilfe der Bézoutiante gewonnenen Resultate betreffs der Separation der Wurzeln. Auf diese Weise beweisen die Verff. den Sturmschen Satz, die Borchardtsche Regel, den Hurwitzschen Satz über Polynome $f(x)$, $g(x)$ mit abwechselnden Wurzeln: Damit die Wurzeln von $f(x)$ und $g(x)$ gegenseitig abwechseln, ist notwendig und hinreichend, daß die Bézoutiante $B(f, g)$ definit ist. — Die Verff. schließen, daß fast alle Aufgaben, die mit Hilfe der Jacobi-Hermiteischen Methode (d. h. der Methode der quadratischen Formen) lösbar sind, auch die Lösung mittels der Bézoutiante zulassen. N. Tschebotarow (Kasan).

Marden, Morris: On the zeros of the derivative of a rational function. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 400—406 (1936).

Verf. beweist folgende Sätze über Nullstellen der Ableitung eines Polynoms $f(z) = \prod_0^p (z - z_j)^{m_j}$: I. Liegt jedes z_i innerhalb des Kreisbereichs $Z_j(z) = |z - \alpha_j|^2 - r_j^2 \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, p$), so liegt jede Nullstelle der Ableitung $f'(z)$ entweder innerhalb eines der erwähnten Bereiche oder innerhalb des Bereichs

$$\left| \sum_0^p \frac{m_j (\bar{\alpha}_j - \bar{z})}{Z_j z} \right|^2 - \left(\sum_0^p \frac{|m_j| \cdot \sigma_j r_j}{Z_j(z)} \right)^2 \leq 0,$$

wobei $\sigma_j = -\text{sign} Z_j(z)$ ist und z_j innerhalb des j -ten Kreisbereichs liegt. — II. Bei denselben Voraussetzungen liegen die Nullstellen der Funktion $f'(z) + \lambda f(z)$ entweder innerhalb der Kreisbereiche $Z_j(z) \geq 0$ oder innerhalb des Bereichs

$$\left| \lambda - \sum_0^p \frac{m_j (\bar{\alpha}_j - \bar{z})}{Z_j(z)} \right|^2 - \left(\sum_0^p \frac{|m_j| \sigma_j r_j}{Z_j(z)} \right)^2 \leq 0.$$

N. Tschebotarow (Kasan).

Foussianis, Ch.: Sur quelques applications du théorème de Rouché dans les polynômes entiers. (*Athènes*, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 265 à 266 (1935).

Beweis des bekannten Satzes von D. E. Mayer: Ist in der Gleichung

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x + \dots + a_nx^n = 0$$

$|a_p| > |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{p-1}| + |a_{p+1}| + \dots + |a_n|$, so besitzt die Gleichung genau p Wurzeln im Innern des Einheitskreises und keine auf seinem Rande. — Auch der Beweis ist nicht unbekannt. (Vgl. A. Cohn, Math. Z. 14, 123. Der Satz von Mayer wurde von L. Berwald wesentlich verschärft, Math. Z. 37, 75, vgl. dies. Zbl. 6, 244.) Sz. Nagy (Szeged).

Obrechhoff, Nicola: Sur les polynômes univalents ou multivalents. (*Athènes*, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 91—94 (1935).

Bezeichnet man mit p eine positive ganze Zahl, mit $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ bzw. $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ beliebige positive bzw. negative Zahlen und ist

$$g = \text{Min}(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|; |b_1|, |b_2|, \dots, |b_m|) \neq 0,$$

so ist die Funktion

$$f(z) = z^p(z - a_1)^{\mu_1} \dots (z - a_n)^{\mu_n}(z - b_1)^{\nu_1} \dots (z - b_m)^{\nu_m}$$

im Kreise $|z| \leq \text{Min}(g, \zeta)$ p -valent, (im Falle $p = 1$ schlicht). Hierbei bedeutet ζ die kleinste positive Nullstelle der Derivierten $f'_0(z)$ der Funktion

$$f_0(z) = z^p(z - |a_1|)^{\mu_1} \dots (z - |a_n|)^{\mu_n}(z - |b_1|)^{\nu_1} \dots (z - |b_m|)^{\nu_m}.$$

Aus diesem Satze lassen sich die übrigen Sätze der Arbeit ableiten. Sz. Nagy.

Toscano, L.: Sulle potenze di una matrice del secondo ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 493—495 (1936).

On representing the elements of the n -th power of a second order matrix as rational functions of invariants. MacDuffee (Madison).

Cherubino, S.: Sulla riduzione delle matrici a forma canonica. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 478—482 (1936).

Cherubino, S.: Sulla riduzione delle matrici a forma canonica. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 647—653 (1936).

Two matrices A and B with elements in the complex field are similar if there exists a non-singular matrix H such that $B = H^{-1}AH$. In I the author indicates the transformations of a chain determining the characteristic of A relative to each latent root, and derives the characteristic of $f(A)$ from that of A . In II he gives explicitly the transformations which carry A into a canonical form differing immaterially from that of Jordan. MacDuffee (Madison).

Waerden, B. L. van der: Reihenentwicklungen und Überschiebungen in der Invariantentheorie, insbesondere im quaternären Gebiet. Math. Ann. 113, 14—35 (1936).

Zunächst wird die Einordnung einer Reihe fundamentaler Methoden der Invariantentheorie für eine beliebige Gruppe \mathfrak{G} in die Darstellungstheorie geschildert. Die Grundlage bildet der Begriff der Größe. Ein System von Größen ist eine lineare Schar \mathfrak{F} von Elementen f , die die Elemente s von \mathfrak{G} als Operatoren besitzt derart, daß sf durch lineare Transformation aus f hervorgeht und $st(f) = (st)f$ für s, t in \mathfrak{G} und f in \mathfrak{F} gilt. Man erhält so eine Darstellung von \mathfrak{G} durch lineare Transformationen in \mathfrak{F} . Ist diese Darstellung vollständig reduzibel, so findet man eine Darstellung von f als Summe einfacher Größen, d. h. von Größen, die zu irreduziblen Darstellungen von \mathfrak{G} gehören. Dies ist die Reihenentwicklung von f . Eine Kovariante einer Größe f ist eine Größe h , deren Koordinaten ganz rational und invariant von den Koordinaten von f abhängen, so daß sh zu sf entspricht. Das allgemeine Problem ist dann das Aufsuchen von Prozessen, die die Konstruktion aller Kovarianten gegebener Größen gestatten. Durch Anwendung von Polarenprozessen kann man zunächst jede Kovariante in eine solche verwandeln, die multilinear in einer Reihe von Größen a, b, \dots

ist und daher als lineare Kovariante des Kroneckerschen Produkts $a \times b \times \dots$ aufgefaßt werden kann. Alle derartigen Kovarianten erhält man durch sukzessive Anwendung des Prozesses der Kroneckerschen Multiplikation zweier einfacher Größen und Reihentwicklung des Produkts. Etwas anders ausgedrückt: Alle multilinearen Kovarianten können durch wiederholte Bildung von einfachen bilinearen Kovarianten oder Überschiebungen erhalten werden. Weiterhin wird die symbolische Methode in darstellungstheoretischer Form geschildert. Der Rest der Arbeit ist dem Fall der speziellen linearen Gruppe gewidmet, deren Behandlung mit der der vollen linearen Gruppe im wesentlichen gleichwertig ist. Allgemeine Formen können hier durch multilineare Formen in kogredienten Variablenreihen ersetzt werden. Die Zerlegung in einfache Größen wird mit Hilfe der Youngschen Symmetrieoperatoren durchgeführt. Versteht man im quaternären Fall unter einer Flagge die Figur, die aus einem Punkt x , einer mit x inzidenten Geraden p und einer mit p inzidenten Ebene u besteht, so kann man die Formen linear homogen und kovariant durch Formen ausdrücken, welche nur die Koordinaten einer Flagge enthalten. Ein entsprechender Satz gilt im n -dimensionalen Fall. Eine symbolische Schreibweise der Normalformen, die bei der Zerlegung auftreten, wird gegeben, und es wird gezeigt, daß man alle Typen von Überschiebungen erhält, wenn man die Invarianten von drei Flaggen bildet und die Koordinaten einer Flagge als Veränderliche auffaßt. Im binären, ternären und quaternären Gebiet wird die Aufstellung dieser Invarianten explizit durchgeführt, und es werden eine Reihe von Relationen für diese Invarianten angegeben. Schließlich wird gezeigt, daß diese allgemeinen Methoden sich für einen Beweis des ersten Fundamentalsatzes der Invariantentheorie verwenden lassen.

R. Brauer (Toronto).

Dubreil, P.: Remarques sur le théorème de Noether. Bull. Soc. Math. France **64**, 99—118 (1936).

Es wird dargelegt, wie man unter Ausnutzung einer Schlußweise von van der Woude (dies. Zbl. **12**, 119) alle bisher bekannten Sätze über die hinreichenden und über die notwendigen Bedingungen für das Bestehen der Identität

$$\varphi(x, y) = A(x, y) f(x, y) + B(x, y) g(x, y) \quad (1)$$

einheitlich herleiten kann. Es sei $R(x)$ ein Polynom in x allein, welches sich darstellen läßt:

$$R(x) = U(x, y) f(x, y) + V(x, y) g(x, y),$$

z. B. die Resultante oder die vom Verf. so genannte Unterresultante (le sous-résultant). Dann folgt aus der Schlußweise von van der Woude sofort: Notw. und hinr. für (1) ist, daß der Rest T der Division von $V\varphi$ durch f (nach Potenzen von y) durch $R(x)$ teilbar ist. Die Bedingung spaltet sich sofort in lokale Bedingungen: Teilbarkeit von T durch Faktoren $(x - a)^c$; damit hat man schon die Zerlegung des Ideals (f, g) in Primärideale, aus der der Noethersche Fundamentalsatz in der klassischen Form folgt. Gleichzeitig ergeben sich Abschätzungen für die Exponenten ϱ , die Bertini, Voss und Dubreil (Diss. Paris 1930) gegeben haben. Schließlich wird ein Satz aus der zitierten Dissertation neu bewiesen, welcher die Primärkomponenten und Exponenten der drei Ideale $(\varphi_1, \varphi_2\varphi_3)$, $(\varphi_2, \varphi_3\varphi_1)$ und $(\varphi_3, \varphi_1\varphi_2)$ miteinander verbindet und aus welchem der Satz vom Doppelpunktsdivisor (v. d. Waerden, dies. Zbl. **12**, 119) folgt.

van der Waerden (Leipzig).

Bell, E. T.: Distributivity of associative polynomial compositions. Ann. of Math., II. s. **37**, 368—373 (1936).

The author defines a polynomial composition for a ring as a pair of polynomials $P(u, v)$, $S(u, v)$ (product and sum) each obeying the associative law and for which either the left or right distributivity of multiplication over addition holds. Commutativity for P or S is not postulated. All polynomial compositions are found. All fields and quasi fields (systems with two operations which satisfy all postulates of a field with the exception that one operation, but not the other has an identity) which admit polynomial compositions are determined. D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

Spampinato, Nicolò: Teoria delle caratteristiche in un'algebra dotata di modulo ed S_r ipercomplessi. Accad. naz. Lincei, Mem., VI. s. 6, 189—258 (1936).

L'Auteur entreprend dans ce travail l'extension au cas général de la notion d'espace hypercomplexe projectif attaché à une algèbre douée de module (c. à. d. possédant un élément-unité) introduite déjà dans certains cas particuliers par C. Segre (Sulle rappresentazioni reali delle forme complesse . . ., Math. Ann. **40**, 413—467; Le Geometrie projective nei campi duali, Atti Accad. Sci. Torino **47**, 308—327) et par lui-même (Atti Accad. Sci. Napoli **1935**; ce Zbl. **12**, 392). La première partie du mémoire est consacrée à la théorie des équations et des substitutions linéaires dans les algèbres; dans la seconde partie, l'auteur aborde l'étude des espaces hypercomplexes projectifs S_r liés à une algèbre et construit ces espaces pour les algèbres régulières, les algèbres doubles et les algèbres du troisième ordre définies dans le corps complexe. *P. Dubreil.*

Stone, M. H.: The theory of representations for Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 37—111 (1936).

A selection of the results of the paper follows; many of them were previously announced by the author. — Relative to products and symmetric differences, any Boolean algebra A is a ring $R(A)$ with unit e , whose elements all satisfy $aa = a$. Conversely, one can define the operations of A in terms of those of $R(A)$, and every such "Boolean ring" with unit is an $R(A)$. — It follows that the theories of the subalgebras, congruence relations and "ideals" are the same for Boolean algebras as for Boolean rings [Stone, Proc. U.S.A. Acad. **21**, 103—105 (1935); this Zbl. **11**, 51]. The subalgebras are a lattice, of which the ideals are a distributive sublattice. Four successively more special kinds of ideals can be distinguished, having many interesting properties. — The representations of any A as an algebra of classes (field of sets) are given by taking families of its prime ideals; the latter become points. Every A has an isomorphic representation [Stone, Proc. U.S.A. Acad. **20**, 197—202 (1934); this Zbl. **10**, 81]; this is equivalent to the theorem that every ideal of $R(A)$ is the product of prime ideals. The results are proved for all Boolean rings and the corresponding "generalized" Boolean algebras. *Garrett Birkhoff* (Cambridge, U.S.A.).

Mahler, Kurt: Über Pseudobewertungen. II. (Die Pseudobewertungen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers.) Acta math. **67**, 51—80 (1936).

Die Teile I und Ia dieser Arbeit sind in dies. Zbl. **13**, 51 und **13**, 147 besprochen worden. Der vorliegende Teil II enthält den Beweis des in I angekündigten Satzes, daß jede nicht der trivialen Pseudobewertung äquivalente Pseudobewertung W eines endlichen algebraischen Zahlkörpers \mathfrak{K} einer (direkten) Summe einiger Absolutbetragbewertungen (durch gewöhnliche Beträge eines konjugierten Körpers) und endlich vieler p -adischer Bewertungen äquivalent ist (natürlich kann die eine oder die andere Sorte auch fehlen). Als Nebenergebnis folgt also der Ostrowskische Satz, daß jede Bewertung von \mathfrak{K} eine der eben genannten ist. Um die in W enthaltenen p -adischen Bewertungen aufzustellen, wird folgendermaßen vorgegangen: W -Zahl heißt jede Zahl δ von \mathfrak{K} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} W(\delta^n) = 0$. Die W -Zahl $\delta = \delta_1/\delta_2$, (δ_1, δ_2) = 1, δ_i ganze Ideale, heißt reduziert, wenn es keine W -Zahl $\delta' = \delta'_1/\delta'_2$ gibt, deren Zähler δ'_1 ein echter Teiler von δ_1 wäre. Es zeigt sich, daß alle reduzierten W -Zahlen den gleichen quadratfreien Zähler \mathfrak{C} haben; sind p_1, \dots, p_t die Primteiler von \mathfrak{C} , so kommen in W gerade die p_i -adischen Bewertungen vor. Eine Absolutbetragbewertung $\varphi(a) = |a^{(k)}|$ kommt genau dann in W vor, wenn für kein a aus \mathfrak{K} gleichzeitig $|a^{(k)}| > 1$ und $W(a) < 1$ ist. Wesentliche Hilfsmittel sind Sätze über Entwicklungen einer Zahl ξ nach Potenzen einer anderen $\alpha \neq 0$ mit beschränkten Koeffizienten (α -adische Entwicklung), andererseits die Tatsache, daß vorgegebene reelle Zahlen $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(r)}$ und Paare $Y^{(r_1+1)}, Y^{(r_1+r_2+1)} = \bar{Y}^{(r+1)}, \dots, Y^{(r_1+r_s)}, Y^{(r_1+2r_s)} = \bar{Y}^{(r_1+r_s)}$ konjugiert komplexer Zahlen beliebig genau durch die Konjugierten $y^{(k)}$ einer Zahl y von \mathfrak{K} approximiert werden können, wobei noch verlangt werden kann, daß der Zähler η_1 von $y = \eta_1/\eta_2$

durch ein vorgegebenes ganzes Ideal c_1 teilbar, aber der Nenner η_2 zu einem vorgegebenen Ideal c_2 teilerfremd ist.

Deuring (Leipzig).

Schmidt, Friedrich Karl: Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. I. Beweis des Riemann-Rochschen Satzes für algebraische Funktionen mit beliebigem Konstantenkörper. *Math. Z.* **41**, 415—438 (1936).

Bisher war der RRS. (Riemann-Rochsche Satz) für einen algebraischen Funktionenkörper K einer Variablen nur unter der Voraussetzung bewiesen, daß der Körper K ein separierendes Element x enthielt, was z. B. für einen vollkommenen Konstantenkörper k zutrifft. In dieser Arbeit wird nun der RRS. ohne jede Voraussetzung über den Körper K bewiesen. In den bisherigen Beweisen wurden Diskriminanten und der damit zusammenhängende Begriff der Komplementärbasis verwendet. Diese Begriffe mußten entweder ausgeschaltet oder anders definiert werden, um zu einem allgemeingültigen Beweis des RRS. zu gelangen, denn bei inseparabler Erweiterung verschwindet die Diskriminante. An Stelle der komplementären Basis wird hier der darstellungstheoretische Begriff einer fastkomplementären Basis eingeführt: Es sei a_{ik} die Darstellung des Elementes a , die durch die Basisdarstellung $K = b_1 k(x) + \dots + b_n k(x)$ vermittelt wird, also $a b_k = \sum b_i a_{ik}$. Zur Basis (b_i) heißt eine Basis (c_i) fastkomplementär, wenn $c_i a = \sum a_{ik} c_k$. Aus der Darstellungstheorie folgt, daß jede Basis eine fastkomplementäre besitzt, allerdings ist diese nicht eindeutig bestimmt, z. B. ist mit (c_i) auch (dc_i) fastkomplementär. Trotzdem reicht dieser Begriff aus, um im wesentlichen den Beweis des RRS. nach bisherigem Muster zu vollenden. Das Geschlecht g des Körpers K kann als Dimension derjenigen Klasse definiert werden, die fastkomplementär zur Hauptdivisorenklasse ist. g ist eine Invariante des Körpers K . — Um nicht auf die ganze Darstellungs- und Idealtheorie verweisen zu müssen, sind die nötigen Hilfssätze zum Teil neu und von diesen Theorien unabhängig bewiesen.

Ernst Witt (Göttingen).

Reichardt, Hans: Eine Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von F. K. Schmidt. *Math. Z.* **41**, 439—442 (1936).

\Re sei ein Ring mit dem Teilring r , und es bestehe die eindeutige Basisdarstellung $\Re = B_1 r + \dots + B_n r$. \Re hat eine Darstellung $A \rightarrow (a_{ik})$ im Matrizenring r_n vermöge $AB_k = \sum B_i a_{ik}$. Wenn es eine Basisdarstellung $\Re = rC_1 + \dots + rC_n$ mit der Eigenschaft $C_i A = \sum a_{ik} C_k$ gibt, so heißt die Basis C_i fastkomplementär zur Basis B_i . (Vgl. das vorst. Ref.) — In dieser Arbeit wird unter bloßer Verwendung der Wedderburnschen Struktursätze bewiesen, daß zu jeder Basis eines halbeinfachen hyperkomplexen Systems eine fastkomplementäre Basis existiert. — Bekanntlich besagt diese Tatsache in der Darstellungstheorie, daß die beiden zu einer festen Basis gehörenden regulären Darstellungen äquivalent sind.

Ernst Witt (Göttingen).

Bungers, Rolf: Über Zahlkörper mit gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteilern. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **46**, 93—96 (1936).

Verf. gibt einige leicht aufstellbare Beispiele von Zahlkörpern, die eine vorgegebene Primzahl p als gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteiler enthalten. Das sind erstens die durch einzelne Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ gebildeten Zahlkörper, wobei $f(x)$ ein irreduzibles ganzzahliges normiertes Polynom und

$$f(x) \equiv x(x+1)(x+2)\dots(x+p) \pmod{p^2}$$

ist. — Zweitens sind das die durch Wurzeln einer irreduziblen normalen (Galoisschen) Gleichung $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ gebildeten Körper, wobei $n > p$, $a_n = \pm p$, $a_{n-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist. — Ref. glaubt, daß die Frage des Verf.: „Es fragt sich nun, ob auch andere Primzahlen als 2 mit der genannten Eigenschaft auftreten können usw.“ schon durch Hensels Satz: „Ist p eine Primzahl, welche kleiner ist als der Grad n des Körpers $K(\alpha)$, und welche im Bereiche dieses Körpers in n verschiedene Primteiler zerfällt, so ist p ein gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler dieses Körpers“ (K. Hensel, *Theorie der algebraischen Zahlen*, S. 274. Leipzig 1908) beantwortet wurde.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Rademacher, Hans: On prime numbers of real quadratic fields in rectangles. Trans. Amer. Math. Soc. **39**, 380—398 (1936).

Eine neue Herleitung des in dies. Zbl. **11**, 55 zitierten Resultates des Verf. Die Anzahl $P(x, x')$ der den Ungleichungen $0 < \omega < x$, $0 < \omega' < x'$ (ω' ist die zu ω algebraisch-konjugierte Zahl) genügenden Primzahlen eines reell quadratischen Zahlkörpers genügt offenbar der Gleichung $P(x, x') = P(x\eta, x'\eta')$, wobei η eine total positive Einheit desselben Körpers ist. Darum ist die Funktion $P(x\eta^v, x'\eta'^v)$ periodisch in bezug auf v und läßt also eine Fourier-Entwicklung zu. — Ist allgemeiner $f(x, x')$ irgendeine periodische Funktion dieser Art, so sind auch $F_0(x, x') = \sum_{\substack{0 < \mu < x \\ 0 < \mu' < x'}} f(\mu, \mu')$,

$F_1(x, x') = \sum_{\substack{0 < \mu < x \\ 0 < \mu' < x'}} (x - \mu)(x' - \mu') f(\mu, \mu')$ periodisch. Die letztere Funktion ist dabei

stetig in bezug auf v ; ihre Fourier-Entwicklung ist also absolut konvergent. — Das erlaubt dem Verf., nach gewissen Umformungen der Fourierschen Formel für $F_1(x, x')$ folgenden Ausdruck zu erhalten:

$$F_1(x, x') = \frac{xx'}{\log \eta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{x'}\right)^{i\gamma n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(xx')^s Z_n(s)}{(s+i\gamma n)(s-i\gamma n)(s+1+i\gamma n)(s+1-i\gamma n)} ds,$$

wobei η die total positive Grundeinheit unseres Körpers, $\gamma = \frac{2\pi}{\log \eta}$, $c > 0$ und

$Z_n(s) = \sum_{\substack{\mu > 0 \\ \mu' > 0}} \frac{f(\mu, \mu') \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^{-i\gamma n}}{N(\mu)^s}$ bedeutet und die Summation sich auf Repräsentanten

aller Systeme von untereinander assoziierten Zahlen erstreckt. — Setzt man insbesondere $f(\mu, \mu') = 1$ für das Primideal (μ) und sonst $f(\mu, \mu') = 0$, so verwandelt sich $Z_n(s)$ in die ζ -Funktion von Hecke [vgl. Math. Z. **6**, 11—51 (1920)]. Die Abschätzung dieser Funktion erlaubt dem Verf., die entsprechende Funktion $F_1(x, x')$ und mit deren Hilfe auch die Funktion $F_0(x, x')$ abzuschätzen. Die letzte ist gerade die Funktion $P(x, x')$. Somit erhält der Verf. die Hauptformel (in etwas speziellerer Form) seiner zitierten Arbeit.

N. Tschebotarow (Kasan).

Zahlentheorie:

Hattori, Hirosi: Leudesdorf's extension of Wolstenholme's theorem. Tôhoku Math. J. **42**, 96—102 (1936).

The author gives a proof of the result in question. (See this Zbl. **11**, 53.) *Davenport*.

Hattori, Hirosi: Some properties of the elementary symmetric functions, the power sums of the least positive reduced system of residues of p^a . Tôhoku Math. J. **42**, 118 bis 124 (1936).

This paper contains results of the same type as those of the author's previous paper (see this Zbl. **11**, 53). *Davenport* (Cambridge).

Lehmer, D. H.: On a conjecture of Ramanujan. J. London Math. Soc. **11**, 114 bis 118 (1936).

This paper is an examination of the congruences

$$p(599) \equiv 0 \pmod{5^4} \quad p(721) \equiv 0 \pmod{11^3}$$

which are special cases of a general conjecture of Ramanujan (Proc. Cambridge Philos. Soc. **19**, 207—210) and in which $p(n)$ is the number of unrestricted partitions of n . If one uses for $p(599)$ and $p(721)$ the values obtained from Hardy-Ramanujan asymptotic formula for $p(n)$, then these congruences are true. A table is also given of the actual values of the troublesome coefficients $A_q(n)$ which appear in the formula for $p(n)$ together with errata in the tables of Hardy and Ramanujan. *D. H. Lehmer*.

Gupta, Hansraj: On linear quotient-sequences. *Math. Student* **3**, 132—137 (1935).

This paper deals with expressions of the type (1): $\left[\frac{kr+l}{m}\right]$ in which k, l, m are fixed integers, $k, m > 0$ and $l \geq -k$, while $r = 1, 2, 3, \dots$. The following problem is considered: Given m and a sequence a_1, a_2, \dots, a_n of positive integers to determine k and l if possible so that each a_r is given by (1). *D. H. Lehmer* (Bethlehem, Pa.).

Pankajam, S.: On Euler's Φ -function and its extensions. *J. Indian Math. Soc.*, N. s. **2**, 67—75 (1936).

The author by a systematic use of the principle of cross classification (see for example Pólya and Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze* **2**, 119) derives the formula for Euler's $\Phi(n)$ and its generalizations by Jordan, Schemmel, and Lucas and gives a new generalization of Jordan's function. This latter is based on the concept due to Vaidyanathaswamy of s -th greatest common divisor of a set of r numbers ($r \geq s$). Just as the ordinary G.C.D. of two numbers is based on the least of two exponents, so the s -th G.C.D. is based on the s -th in order of increasing magnitude of r exponents. The generalization of Jordan's function is to a function $J_{rs}(n)$ which is the number of sets of r integers less than n whose s -th G.C.D. is prime to n . The formula for $J_{rs}(n)$ is similar to that for Jordan's function $J_r(n)$ in which the typical factor $(1 - p^{-r})$ is replaced by $(1 - f_{rs}(p^{-1}))$ where $f_{rs}(x)$ is the polynomial of r -th degree giving the first s terms in the expansion of $(x + (1 - x))^r$.

D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

Bell, E. T.: A functional equation in arithmetic. *Trans. Amer. Math. Soc.* **39**, 341—344 (1936).

Each of the various theories of binary compositions of numerical functions is characterized and conveniently described by a function $\Phi(x, y)$. Thus the two best known theories in which "multiplication" in the ring of all numerical functions is abstractly identical with the Cauchy and Dirichlet multiplication of infinite series correspond respectively to $\Phi(x, y) = x + y - 1$ and $\Phi(x, y) = xy$. The conditions under which a general $\Phi(x, y)$ gives rise in this way to an arithmetical theory of composition were considered by the reviewer in 1931 (see this *Zbl.* **3**, 102) who gave five postulates which $\Phi(x, y)$ must satisfy. In the present paper the author shows that the only polynomials $\Phi(x, y)$ satisfying these postulates are $x + y - 1$ and xy , so that the only theories of numerical functions which are based on polynomials are the two familiar theories referred to above.

D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

Bell, E. T.: The form $wx + xy + yz + zu$. *Bull. Amer. Math. Soc.* **42**, 377 bis 380 (1936).

This paper gives a proof of the following theorem: The number of representations of a positive integer n by the form $wx + xy + yz + zu$ in which $w, x, z, u > 0$, while $y \geq 0$ is given by $\zeta_2(n) - n\zeta_0(n)$, where $\zeta_k(n)$ is the sum of the k -th powers of all the divisors of n . This theorem is apparently the only one of many stated by Liouville for which up to now no proof has been given. Two other results are established: The number of representations of n by the form $wx + xy + yz + zu + ux$ is $\frac{1}{2}[\zeta_2(n) + \zeta_1(n)] - n\zeta_0(n)$ in case $w, x, y, z > 0$; $u \geq 0$ and is $\zeta_2(n)$ in case $x, y > 0$; $u, z, w \geq 0$.

D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

Pall, Gordon: On rational automorphs of binary quadratic forms. *Bull. Amer. Math. Soc.* **42**, 541—544 (1936).

Unter dem Nenner einer (rationalen) Automorphie $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ versteht man den gemeinsamen Nenner von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ist A eine Automorphie von $f = ax^2 + bxy + cy^2$ und geht f durch die unimodulare Substitution S in $f' = [a', b', c']$, so ist $A = S^{-1}AS$ eine Automorphie von f' und hat denselben Nenner wie A . Der Nenner jeder Automorphie von $f = [a, b, c]$, die eine ganzzahlige Lösung von (1) $n = ax^2 + bxy + cy^2$

in eine andere ganzzahlige Lösung überführt, ist ein Teiler von n . Irgend zwei ganzzahlige Lösungen von (1) können durch automorphe Substitutionen von $[a, b, c]$ übergeführt werden. Wenn $(m, n) = 1$, dann kann eine Automorphie mit dem Nenner mn nicht immer als Produkt von Automorphismen mit den Nennern m und n ausgedrückt werden.

Hofreiter (Wien).

Žitomirsky, O.: Sur la classification des formes cubiques. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 10, 1299—1311 (1935).

Die Klassifikation der binären kubischen Formen, welche von Arndt (Crelle 53) angegeben worden ist, gestattet eine geometrische Deutung. Sei $f(X, Y) = a_0 X^3 + 3a_1 X^2 Y + 3a_2 X Y^2 + a_3 Y^3$ die Form mit der Diskriminante $D \neq 0$ und ganzen rationalen Koeffizienten, und sei $a_0 \neq 0 \neq a_3$. Man benutzt die Lösungen α_1, α_2 und α_3 der Gleichung $f(\alpha, 1) = 0$ und bildet $x_i = a_0 \alpha_i$, $y_i = -a_3 \alpha_i$ und die Vektoren ξ und η . Wenn X, Y und Z alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen, so ordnet man der Form f das Gitter $\tau = (r_1, r_2, r_3) = X\xi + Y\eta + Ze$ mit dem Vektor $e = (1, 1, 1)$ zu und definiert die Addition und Multiplikation zweier Gitterpunkte komponentenweise. Ist $f(X, Y)$ irreduzibel, so hat man hier einen Ring aus einem Zahlkörper. Wegen $D \neq 0$ ist das Gitter jedenfalls dreidimensional. Unterwirft man die Form einer Substitution $X = aX' + bY'$, $Y = cX' + dY'$, $ad - bc = 1$ und konstruiert nun das Gitter, so gibt es ganze Zahlen z_1 und z_2 , so daß $Z = z_1 X' + z_2 Y' + Z'$ die Kongruenz der Gitter zeigt. Willkürlich bleibt nur die Reihenfolge der Wurzeln α , welches zu Spiegelungen und Drehungen um die Achse Oe führt. Umgekehrt kann man zu einem dreidimensionalen Ring von Gitterpunkten auch eindeutig eine Formenklasse konstruieren. Da $r_1 + r_2 + r_3 \equiv 0 \pmod{3}$ ist, liegen alle Punkte τ in Ebenen $r_1 + r_2 + r_3 = 3n$; außer e braucht man daher nur ein zweidimensionales Gitter in der Ebene E mit $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ zu kennen. Ist $D < 0$, so führt man in E eine neue komplexe Koordinate ξ ein. In $(0, 0, 0)$ soll $\xi = 0$ sein, in $(2, -1, -1)$ $\xi = 1$. Man projiziert ξ und η parallel zu e in E hinein und findet Gitterpunkte mit Koordinaten ξ_1 und ξ_2 . Setzt man $\xi = \xi_1 X + \xi_2 Y$ und $\eta = \bar{\xi}$ (konj. kompl.), so geht f in ein Vielfaches von $\xi^3 - \eta^3$ über; die quadratische Kovariante wird dann $\xi \cdot \eta$, womit der Anschluß an die Ausführungen von Klein (Vorl. ü. ausgew. Kap. d. Zahlenthe., 1. u. 2., Göttingen 1896/97) erreicht ist. Bei $D > 0$ setzt man α_1 reell voraus und kommt mit $r'_1 = r_1$, $r'_2 = \frac{1}{2}(r_2 + r_3)$, $r'_3 = \frac{1}{2}i(r_3 - r_2)$ zu entsprechenden Ergebnissen. Unter Benutzung der Klassifikation der zweidimensionalen Gitter wird dann die Lösung des Problems gefunden. Landherr (Hamburg).

Chowla, Inder: On sums of powers. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 4, 170 bis 172 (1936).

The author obtains non-trivial solutions in positive integers of

$$x_1^9 + \dots + x_6^9 = y_1^9 + \dots + y_8^9 \text{ and } x_1^9 + \dots + x_7^9 = y_1^9 + \dots + y_7^9.$$

For previous results see Subba Rao (this Zbl. 10, 9). Davenport (Cambridge).

Chowla, S.: Note on Waring's problem. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 4, 173 (1936).

Beweis des Satzes: Sei $f(m)$ die Anzahl der Darstellungen von m als Summe von k k -ten Potenzen nichtnegativer ganzer Zahlen. Es gebe eine Zahl $n = n(k)$, so daß für jedes $\varepsilon > 0$

$$\sum_1^x f(m)^2 (x - m)^n = O(x^{n+1+\varepsilon})$$

ist. Dann besteht die Ungleichung

$$G(k) \leq \max(2k + 1, \Gamma(k)),$$

wo $G(k)$ und $\Gamma(k)$ die beim Waringschen Problem gebräuchliche Bedeutung haben.

Mahler (Krefeld).

Chowla, S., and S. S. Pillai: Hypothesis *K* of Hardy and Littlewood. *Math. Z.* **41**, 537—540 (1936).

See this *Zbl.* **13**, 247.

Dickson, L. E.: A generalization of Waring's problem. *Bull. Amer. Math. Soc.* **42**, 525—529 (1936).

Let $g(n, m)$ be the least value of g such that every integer $\geq m$ is a sum of g n -th powers; let $g(n) = g(n, 1)$. The author proves: (1) $g(6) \leq 110$, (2) $g(11, 2 \cdot 5^{11} + 6^{11}) \leq 341$, (3) $g(9, 2 \cdot 5^9 + 6^9) \leq 270$. The last two results compare with $g(11) = 2132$, $g(9) = 548$. The author says that there is a peak x at m , if m is a sum of x , but not fewer than x , n -th powers. There are exactly 24 peaks ≥ 336 if $n = 11$, and exactly 19 peaks ≥ 163 if $n = 9$. The author gives tables of these peaks.
Wright (Aberdeen).

Pisot, Charles: Sur certaines propriétés caractéristiques des nombres algébriques. *C. R. Acad. Sci., Paris* **203**, 148—150 (1936).

Verf. verallgemeinert sein voriges Resultat (dies. *Zbl.* **13**, 295), indem er folgendes beweist: Damit α algebraisch sei, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Folge $A(a_0, a_1, a_2, \dots)$ ganzer rationaler Zahlen gibt, so daß für jedes n gilt: $|p_n - \alpha q_n| \leq c_n^{-\varepsilon}$, wobei $p_n = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \dots + c_k a_{n+k}$, $q_n = d_0 a_n + d_1 a_{n+1} + \dots + d_k a_{n+1}$, $\varepsilon > 0$, c_i, d_i fixe Zahlen sind. — Der Beweis beruht auf folgendem Hilfssatz: Ist $0 < \theta < 1$, befriedigen die Zahlen der Folge A die Bedingungen $|\alpha_0 a_{n+k} + \alpha_1 a_{n+k-1} + \dots + \alpha_k a_n| < C\theta^n$ und bestehen die rekurrenten Relationen $a_{n+r} + b_1 a_{n+r-1} + \dots + b_r a_n = 0$, so fallen die Wurzeln der Gleichungen $\alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_k = 0$ und $x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_r = 0$, welche absolut größer als θ sind, zusammen. Verf. beweist diesen Satz, indem er auf die Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_0 a_{n+k} + \alpha_1 a_{n+k-1} + \dots + \alpha_k a_n) z^{n+k} = R(z) + (\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_k z^k) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Sätze von Borel [*Bull. Sci. math.* **18**, 22 (1894)] und Fatou [*Acta math.* **30**, 368 (1906)] über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten anwendet. — Dieses Resultat läßt sich auch folgendermaßen formulieren: Damit α algebraisch sei, ist notwendig und hinreichend, daß es ein ganzzahliges Polynom $H(\alpha)$ und eine Folge A gibt, so daß $|a_{n+1} - H(\alpha) a_n| \leq a_n^{-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) für jedes n besteht. *N. Tschebotaröw* (Kasan).

Turkstra, Hessel: Metrische Beiträge zur Theorie der diophantischen Approximationen im Körper der p -adischen Zahlen. Amsterdam: Diss. 1936. 142 S. u. deutsch. Zusammenfassung [Holländisch].

Der Verf. überträgt in seiner Dissertation verschiedene Sätze über diophantische Approximationen im Körper der reellen Zahlen, vor allem solche metrischen Charakters, auf den Körper der Henselschen p -adischen Zahlen. Er beginnt mit einigen vorbereitenden Kapiteln, in denen die Theorie der bewerteten Körper, besonders die des Körpers der p -adischen Zahlen, besprochen wird, ferner der Minkowskische Linearformensatz [*Geometrie der Zahlen*, S. 104 (1910)] mit seinem p -adischen Analogon [K. Mahler, *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **44**, 250—255 (1934); dies. *Zbl.* **10**, 198] und einigen Folgerungen aus beiden sowie die Mahlersche Klasseneinteilung der reellen bzw. p -adischen Zahlen in A -Zahlen, S -Zahlen, T -Zahlen und U -Zahlen [*Mathematica III B*, 177—185 (Zutphen 1934/35)]. Alsdann gibt er in Hoofdstuk V eine eingehende Darstellung der Maßtheorie für Mengen p -adischer Zahlen, wobei er sich auf die Feller-Torniersche Maßtheorie des Baireschen Nullraums [*Math. Ann.* **107**, 165—187 (1933); dies. *Zbl.* **5**, 199] stützt. Als Anwendung davon wird in Hoofdstuk VI gezeigt, daß die Menge der p -adischen Zahlen, die keine S -Zahlen sind, das Maß Null hat; dies ist einem Satz von Mahler für reelle S -Zahlen ganz analog [*Math. Ann.* **106**, 131—139 (1932); dies. *Zbl.* **3**, 246]. Die zwei letzten Kapitel endlich bringen ohne durchgeführte Beweise Sätze über Dichtigkeit p -adischer Mengen und eine Anwendung derselben auf das p -adische Analogon eines Satzes von Khintchine [*Math. Z.* **23**, 280—284 (1925)]; eine eingehende Darstellung dieser Untersuchungen soll in weiteren Arbeiten erfolgen.
Mahler (Krefeld).

Gruppentheorie.

Turkin, W. K.: Über einfache Gruppen von gerader Ordnung. *Rec. math. Moscou*, N. s. 1, 341—344 u. deutsch. Zusammenfassung 344 (1936) [Russisch].

Zwei Sätze über die einfachen endlichen Gruppen von der Ordnung $n = 2^\alpha m$, wo m eine ungerade Zahl ist. 1. Ist Γ eine solche Gruppe und ist λ_0 das Produkt des Index einer Sylowschen Untergruppe von der Ordnung 2^α in ihrem Normalisator mit der Anzahl solcher Sylowschen Untergruppen, die ein gegebenes Element von der Ordnung 2^β , $\beta \leq \alpha$, enthalten, so ist $\lambda_0 \equiv m \pmod{4}$. 2. Ist ν die Anzahl der Elemente von der Ordnung 2^β , $\beta \leq \alpha$, und ist q der kleinste Faktor von m , so ist $\nu < n \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{q} \right)$ bei $q \equiv 1 \pmod{4}$ und $\nu < n \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{q+2} \right)$ bei $q \equiv 3 \pmod{4}$. A. Kurosch.

Uzkow, A. I.: Über ein Theorem von Frobenius. *Rec. math. Moscou*, N. s. 1, 337—339 (1936).

Es sei \mathfrak{G} eine Gruppe mit lauter Elementen von endlicher Ordnung, wobei nur endlich viele Elemente von einer festen Ordnung existieren mögen und das Zentrum von \mathfrak{G} nur endlich viele Elemente enthält. Alle Ketten von Untergruppen von \mathfrak{G} , deren jede eigentliche Untergruppe der vorhergehenden ist, sollen nach endlich vielen Schritten abbrechen, ebenso alle Ketten, in denen jede Untergruppe eigentliche Untergruppe des nachfolgenden Gliedes der Kette ist (Teilerkettersätze). Dann gilt die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Frobenius [*S.-B. preuß. Akad. Wiss.* 981 (1895); 987 (1903)]: Ist \mathfrak{K} ein Komplex von Elementen aus \mathfrak{G} , der invariant ist in bezug auf Transformation mit den Elementen einer endlichen Untergruppe \mathfrak{H} von \mathfrak{G} , dann ist die Anzahl der Elemente aus \mathfrak{G} , deren n -te Potenz in \mathfrak{K} liegt entweder ein Vielfaches des größten gemeinsamen Teilers von n und der Ordnung von \mathfrak{H} oder unendlich. Magnus (Frankfurt a. M.).

Deuring, Max: Anwendung der Darstellungen von Gruppen durch lineare Substitutionen auf die galoissche Theorie. *Math. Ann.* 113, 40—47 (1936).

Es sei K ein Normalkörper über dem Grundkörper k mit der Galoisschen Gruppe \mathfrak{G} . Ist a_1, \dots, a_n eine Basis von K , so wird jedem Element σ von \mathfrak{G} durch $(a_1^\sigma, \dots, a_n^\sigma) = M_\sigma(a_1, \dots, a_n)$ eine Matrix M_σ in k zugeordnet, und diese Matrizen bilden eine zur regulären Darstellung von \mathfrak{G} äquivalente Darstellung (vgl. Deuring, dies. Zbl. 5, 6). Anders ausgedrückt: Faßt man K als additiven Modul über k auf, der die Elemente von \mathfrak{G} als Operatoren besitzt, so ist K zu dem Gruppenring $\mathfrak{G}(k)$ von \mathfrak{G} in k operatorisomorph. Für diesen Satz und einige mit ihm zusammenhängende Sätze wird ein neuer Beweis gegeben. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Charakteristik von k nicht im Grad von K/k aufgeht. Unter einem Galoismodul \mathfrak{I} versteht man das Bild eines Linksideals von $\mathfrak{G}(k)$ bei isomorpher Abbildung auf K . Ist \mathfrak{I} zugleich Modul in bezug auf einen Zwischenkörper H von K/k , so ist \mathfrak{I} auch Galoismodul von K/H . Gehört zu \mathfrak{I} als Galoismodul von K/H die Darstellung Δ der zugehörigen Galoisschen Gruppe, d. h. der Invariantengruppe \mathfrak{S} von H , so bestimmt \mathfrak{I} als Galoismodul von K/k die von Δ induzierte Darstellung von \mathfrak{G} . Dies bleibt auch dann noch richtig, wenn man k durch einen Erweiterungskörper k^* und dementsprechend K und H durch die Algebren K_{k^*} und H_{k^*} ersetzt. R. Brauer (Toronto).

Montgomery, Deane, and Leo Zippin: Periodic one-parameter groups in three-space. *Trans. Amer. Math. Soc.* 40, 24—36 (1936).

Let T be any one-parameter group of homeomorphisms of Euclidean three-space E . Suppose also that the orbit of every point $p \in E$ is periodic, and that in every finite sphere the periods of all points are uniformly bounded. The authors prove that after a suitable homeomorphism of E , the set of fixed points becomes the z -axis, while the orbits of the moving points become the circles parallel to the (x, y) -plane with centers on the z -axis. It follows that if T is periodic, it is topologically the rotation-group. Garrett Birkhoff (Cambridge, U.S.A.).

Whitehead, J. H. C.: On the decomposition of an infinitesimal group. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **32**, 229—237 (1936).

The note consists of an algebraic proof by induction of Killing's theorem to the effect that if G is an infinitesimal group and I its maximum invariant solvable subgroup then G contains a subgroup simply isomorphic with G/I . The proof given is valid for real as well as complex groups. Among geometric applications is the theorem that volume of an equi-affine space is preserved by any perfect group of affine collineations.

M. S. Knebelman (Princeton).

Ado, I.: Über die Darstellung von Lieschen Gruppen durch lineare Substitutionen. *Bull. Soc. phys.-math. Kazan*, III. s. 7, 3—41 u. deutsch. Zusammenfassung 41—43 (1936) [Russisch].

The main theorem of this paper is that every Lie group has an isomorphic linear group. The proof is based on the possibility of linear representation of a group of rank zero and of a solvable group.

M. S. Knebelman (Princeton).

Analysis.

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Lyn, G. van der: On several families of plane curves with an application to differential equations. *Ann. of Math.*, II. s. **37**, 642—644 (1936).

Mit Hilfe eines Auswahlverfahrens, anschließenden Diagonalverfahrens und eines Satzes von Sierpiński über die Unmöglichkeit, ein Kontinuum als Summe von höchstens abzählbar vielen, paarweis fremden Kontinuen darzustellen, wird folgender interessante Satz bewiesen, der den wohlbekannten Satz über die stetige Abhängigkeit der Integralkurven einer Differentialgleichung vom Anfangspunkt als Sonderfall enthält: Es sei D ein abgeschlossenes Gebiet, das von einer geschlossenen Jordankurve begrenzt wird; durch jeden Punkt P von D gehe genau ein abgeschlossener Jordanbogen $C(P)$ einer Menge F von Jordanbögen; die beiden Endpunkte jedes dieser Bögen mögen auf dem Rand von D liegen. Dann ist $C(P)$ eine stetige Funktion von P , d. h. bei gegebenem P_0 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung \mathcal{U} von P_0 , so daß für jedes in \mathcal{U} liegende P die Kurve $C(P)$ der ε -Umgebung von P_0 angehört. Diese Tatsache ist noch gewisser Verallgemeinerungen fähig. — Ist $f(x, y)$ in D definiert und bilden die Integralkurven der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ eine Kurvenschar der obigen Art, so gehört $f(x, y)$ zur ersten Baireschen Klasse. Diese Tatsache gilt nicht mehr im dreidimensionalen Raum.

Kamke (Tübingen).

Satô, Tokui: Contribution à l'unicité de la solution d'une équation différentielle ordinaire. *Jap. J. Math.* **13**, 1—6 (1936).

Im Anschluß an ein von Okamura (*Mem. Coll. Sci. Kyôto*, Ser. A **1934**; vgl. dies. Zbl. **11**, 209) aufgestelltes Eindeutigkeitskriterium (Bedingung, die zugleich notwendig und hinreichend ist) für die Lösungen der Gleichung $y' = f(x, y)$ mit stetiger rechter Seite werden hier mehrere Abarten dieses Kriteriums hergeleitet.

Kamke.

Kryloff, N., and N. Bogoliuboff: Upon some new results in the domain of non-linear mechanics. *Proc. Indian Acad. Sci.*, Sect. A **3**, 523—526 (1936).

Verff. untersuchen periodische Lösungen des Systems:

$$x'' + n^2 x = p \sin q t y'; \quad y'' + n^2 y = -p \sin q t x$$

(Zeemanneffekte im veränderlichen Feld; Anm. d. Ref.) bei der Annahme, daß p/n genügend klein ist. Es wird nur die erste Näherung untersucht. Die Methode ist die Methode langsam veränderlicher Parameter, die schon vielfach von van der Pol und anderen angewandt wurde.

A. Andronoff u. A. Witt (Moskau).

Scheffé, Henry: Asymptotic solutions of certain linear differential equations in which the coefficient of the parameter may have a zero. *Trans. Amer. Math. Soc.* **40**, 127—154 (1936).

The author considers equations of the type:

$$\frac{d^n u}{dz^n} + p_1(z) \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} u}{dz^{n-2}} + \cdots + \{p_n(z) + q^n \Phi^n(z)\} u = 0$$

in a finite closed simply connected region, containing $z = 0$ as interior point, with analytic coefficients p_1, p_2 etc. and Φ^n , whereas Φ^n is of the form $z^\nu \Phi_1^n(z)$ with ν a positive integer or zero and $\Phi_1 \neq 0$ in the region. The special case $d^n/dx^n \{y(x, \varrho)\} - \varrho^n x^\nu y(x, \varrho) = 0$ is first studied, which, by the substitution $x = t\varrho^{-n/p}$ and $p = n + \nu$ yields $d^n/dt^n \{y(t)\} - t^\nu y(t) = 0$. A power series solution of this equation is known round the origin, the coefficients of which may be expressed as quotients of gamma functions. The solutions are single valued at every point of a Riemann surface over the ξ -plane $t = (p\xi/n)^{n/p}$ with branch point at the origin. Formal asymptotic solutions of the form $e^{\omega\xi/\xi^{\nu\beta/p}} \{1 + b_1/\xi + \dots\}$ are obtained by successive determination of the coefficients. In order to show to which of the formal solutions everyone of the set of true solutions is asymptotic in the neighbourhood of ∞ a subdivision of the ξ -surface in sectors by rays from the origin is necessary. Referring to the work of Stokes, certain multipliers, called Stokes multipliers are defined, which, in any of the above sectors, relate the true solution to asymptotic solutions of the formal type. Now the author turns again to the z plane and maps a part of it determined by the cut $-\pi < \arg z \leq \pi$ on the $\left\{ \Phi_2 = \int_0^z \Phi(z) dz \right\}$ — plane, using a Riemann surface Φ_2 with branch point at the origin. The t -equation is transformed to the z -equation and asymptotic as well as power series solutions of this latter equation are obtained. Curves are defined, and theorems related to them are proved, such that regions in z are obtained, in which asymptotic relations hold. The concluding chapter deals with the solutions at the zero, giving their form and their multipliers as well as the sectors, in which they hold.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Horn, J.: *Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen. Fortsetzung der Arbeit in Bd. 111. Math. Ann. 113, 242—291 (1936).*

Unter weiterer Ausbildung der früher (dies. Zbl. 12, 304) benutzten Methoden wird das Verhalten der Integrale gewisser Systeme linearer Differentialgleichungen untersucht für den Fall, daß sich der Punkt x, y auf einfachen Wegen den verschiedenen Unbestimmtheitsstellen nähert. Dies Verhalten wird durch asymptotische Reihen mit den beiden Veränderlichen x, y dargestellt.

v. Koppensfels (Hannover).

Trjitzinsky, W. J.: *Theory of linear differential equations containing a parameter. Acta math. 67, 1—50 (1936).*

The paper presents a developement of the G. D. Birkhoff's and author's previous works upon linear difference, q -difference and differential equations (this Zbl. 6, 168; 7, 211; 8, 255; 10, 300; 11, 69; 13, 269) and together with them has an aspect of unity. The present object is to establish the asymptotic properties (for large values of λ) of the solutions of a linear differential equation

$$L_n(x, \lambda; y) \equiv \sum_{k=0}^n a_{n-k}(x, \lambda) y^{(k)} = 0 \quad (\text{A})$$

with coefficients indefinitely derivable in x ($a \leq x \leq b$) and being representable in the form

$$a(x, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(x) \lambda^{m-\nu} \quad (m \text{ integer})$$

or merely asymptotic to such series. No restrictions take place on the roots of the corresponding characteristic equation. — The equation (A) is transformed into a matrix system what is formally satisfied by a matrix $(e^{Q_{ij}(x, \lambda)} \sigma_{ij}(x, \lambda))$ the $\sigma_{ij}(x, \lambda)$ being expressions of the form $\sum_{r=0}^{\infty} \sigma_{ijr}(x) \lambda^{-\frac{r}{k_{ij}}}$ (k -integers). Some auxiliary matrix-systems are then solved by means of product-integrals and an iteration process is employed for to secure the main theorem of the existence of solutions asymptotically represented by the formal series in some region R extending to infinity in the λ plane. It is to be

remarked that the results of previous investigators of that subject (Birkhoff, Tamarin, Noaillion, Langer) were till now less general than the above mentioned, for either some restrictions were made about the characteristic equation, or the solutions were asymptotic to the formal series to a finite number of terms only, or the relations were proved only along a fixed ray. — The concluding section of the paper is devoted to the asymptotic properties of the solutions of a non homogenous equation $L(x, \lambda; y) = a(x, \lambda)$, integro-differential equation

$$L(x, \lambda; y) = a(x, \lambda) + \int_c^x b(u, x, \lambda) y(u, \lambda) du$$

and finitely of the boundary value problem

$$L(x, y, \lambda) = f(x); \quad \sum_{k=1}^n \int_c^d y^{(k-1)}(t, \lambda) d\alpha_{i,k}(t) = 0.$$

Janczewski (Leningrad).

Lasley jr., J. W.: On Monge's differential equation. Amer. Math. Monthly 43, 284 bis 286 (1936).

L'auteur envisage l'équation différentielle des coniques, donnée par Monge: $9q^2t - 45qrs + 40t^3 = 0$, où on a:

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx}, \quad r = \frac{dq}{dx}, \quad s = \frac{dz}{dx}, \quad t = \frac{ds}{dx}.$$

L'auteur présente le premier membre de cette équation sous la forme d'un déterminant; en transformant ce dernier, il parvient à l'équation différentielle des coniques, donnée par Halphen. En démontrant que le 1^{er} membre de cette équation peut être regardé comme un Wronskien, l'auteur obtient une relation linéaire entre les quantités y''' , $(xy)'''$ et $(y^2)'''$. En intégrant cette relation successivement trois fois, l'auteur obtient l'intégrale générale de l'équation de Monge sous la forme de l'équation générale des coniques.

Nil Glagoleff (Moskau).

Bouligand, Georges: Sur le problème de Cauchy pour l'équation $F(x, y, z, p, q) = 0$. Bull. Sci. math., II. s. 60, 203—224 (1936).

Einfache geometrische Betrachtungen über das Cauchysche Problem. So wird z. B. gezeigt, daß das Problem für $u_x^2 + u_y^2 = 1$ und eine in der Ebene $z = 0$ liegende Anfangskurve C dann und nur dann lösbar ist, wenn C eine beschränkte (nicht notwendig stetige) Krümmung hat. Mit Hilfe nichteuklidischer Maßbestimmung läßt sich dieses Resultat noch verallgemeinern. Weiter Betrachtungen über Rückkehrkanten auf Lösungsflächen, wobei hauptsächlich Differentialgleichungen betrachtet werden, die eine Transformationsgruppe in sich zulassen, für welche die Anfangskurve eine Trajektorie ist.

W. Feller (Stockholm).

Théodoreseco, N.: Les solutions élémentaires d'une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Rev. math. Union Interbalkan. 1, 59—72 (1936).

Es handelt sich um Gleichungssysteme der Form

$$\sum_{h,k} \gamma_{ih}^k \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} + \sum_h \gamma_{ih}^0 \varphi_h = 0, \quad i, h = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m,$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die charakteristische Form eine quadratische Differentialform als Faktor enthält: $\left\| \sum_k \gamma_{ih}^k \frac{\partial G}{\partial x_k} \right\| = PQ$ mit regulärem Q . (Beispiel: die Diracschen Elektronengleichungen.) Durch Übertragung des Hadamardschen Verfahrens gelingt mit Hilfe sukzessiver Approximationen die Konstruktion einer Grundlösung mit algebraischer Singularität längs einer Fläche $G = 0$, die Lösung von $P = 0$ ist, während Q auf ihr $\neq 0$ bleibt. Im übrigen wird Analytizität vorausgesetzt.

W. Feller (Stockholm).

Vasilescu, Florin: Le problème de Dirichlet dans le cas le plus général. (*Conférences internat. sur les équations aux dérivées partielles, Genève, 17.—20. VI, 1935.*) Enseignement Math. **35**, 88—106 (1936).

Exposé relatif à l'équation de Laplace; la généralité concerne la nature de la frontière, sur laquelle est donnée une suite continue de valeurs qui, dans le cas classique, doivent être prises par la fonction harmonique inconnue. Cas où le problème ainsi posé devient impossible. Problème plus général de Wiener, possible pour tout domaine. Procédés divers qui permettent de traiter le problème classique et le problème généralisé; l'auteur insiste sur le fait, découvert par lui, que toutes les définitions du problème généralisé conduisent à la même fonction que le procédé de Wiener. Étude de la distribution des points réguliers et irréguliers sur la frontière. *Giraud.*

Schauder, J.: Équations du type elliptique, problèmes linéaires. (*Conférences internat. sur les équations aux dérivées partielles, Genève, 17.—20. VI, 1935.*) Enseignement Math. **35**, 126—139 (1936).

C'est surtout du problème de Dirichlet relatif à l'équation générale linéaire du type elliptique que l'aut. s'occupe, et il indique comment il peut le traiter, en partant des équations de Laplace et de Poisson, par un procédé d'approximations successives, complété par la théorie des opérations linéaires complètement continues (vollstetig), due à F. Riesz. L'aut. rappelle qu'il peut traiter ainsi des équations dont les coefficients sont seulement supposés continus, au moins dans le cas de deux dimensions, et qu'il a appliqué le résultat en traitant les équations qui ne sont linéaires que par rapport aux dérivées secondes de l'inconnue. L'aut. annonce que la même méthode lui permet de traiter les problèmes du type de Neumann. Mention est faite des méthodes qui emploient les potentiels généralisés, et qui permettent de donner les valeurs que doit prendre, en chaque point de la frontière, la dérivée suivant une direction donnée non tangente, ou la somme de cette dérivée et du produit de l'inconnue par une fonction donnée. Enfin l'aut. indique les résultats relatifs à l'extension du point de vue de Wiener aux équations linéaires générales. *Georges Giraud.*

Bergmann, Stefan: Über ein Verfahren zur Konstruktion der Näherungslösungen der Gleichung $\Delta u + \tau^2 u = 0$. Anhang zur Arbeit: Über die Knickung von rechteckigen Platten bei Schubbeanspruchung. Appl. Math. u. Mech. **3**, 97—106 (1936).

Um das Randwertproblem: $\Delta u + \tau^2 u = 0$ im Innern und $u = 0$ am Rande eines zweidimensionalen Bereiches \mathfrak{B} zu lösen, verfährt Verf. folgendermaßen: Er konstruiert zunächst ein bestimmtes System $w_1(x, y, \tau), w_2(x, y, \tau) \dots$ von Lösungen der Gleichung $\Delta u + \tau^2 u = 0$ und bildet mit diesen die Kombinationen

$$V_n(x, y, \tau) = \sum_{s=1}^n \vartheta_s w_s(x, y, \tau). \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Nunmehr werden die Konstanten ϑ_s und τ so bestimmt, daß das über den Rand von \mathfrak{B} erstreckte Integral über V_n^2 ein Minimum wird unter der Nebenbedingung, daß das Integral über \mathfrak{B} mit dem gleichen Integranden den Wert 1 hat. Verf. beweist, daß für $n \rightarrow \infty$ die so gebildeten V_n gegen eine Eigenfunktion und die entsprechenden τ -Werte gegen den zugehörigen Eigenwert der eingangs formulierten Randwertaufgabe konvergieren. (I. s. dies. Zbl. **3**, 367.) *E. Rothe* (Breslau).

Ciorănescu, Nicolas: Sur les solutions les plus générales de certaines équations aux dérivées partielles du type elliptique. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **38**, H. 1, 3—10 (1936).

Durch Zurückführung auf $\Delta u + \lambda u = 0$ wird für die Lösungen von $\Delta^p u + \lambda u = 0$ eine Reihenentwicklung nach Besselfunktionen gefunden. *W. Feller* (Stockholm).

Nicolescu, Miron: Sur quelques propriétés des fonctions biharmoniques. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **38**, H. 1, 39—47 (1936).

Im n -dimensionalen Raume, $n \geq 4$, sei die Lösung u von $\Delta \Delta u = 0$ mitsamt ihrer inneren Normalableitung auf der Peripherie einer Hypersphäre vom Radius R

nichtnegativ. Dann ist u im Innern jeder konzentrischen Hypersphäre von einem Radius $\leq 2R/n - 2$ nichtnegativ, und diese Konstante läßt sich nicht verbessern.

W. Feller (Stockholm).

Nicolesco, Miron: Familles normales de fonctions polyharmoniques. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 38, H. 1, 49—52 (1936).

Beweis der beiden Sätze: Eine Folge von Lösungen der Gleichung $\Delta^p u = 0$, die im Bereiche B bzw. im konvexen Bereiche C gleichmäßig beschränkt bzw. vollständig subharmonisch sind, bildet in B bzw. C eine familie normale im Montelschen Sinne.

W. Feller (Stockholm).

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Tchakaloff, L.: Über die Approximation eines stetigen Kernes durch einen ausgearteten. Rev. math. Union Interbalkan. 1, 29—31 (1936).

Beweis der Approximierbarkeit eines stetigen Kernes durch endliche Summen $\sum X_r(x) Y_r(y)$. Das dabei angewandte, naheliegende Verfahren unterscheidet sich von dem ursprünglichen von E. Schmidt (s. Math. Ann. 65, 372) nur darin, daß statt abteilungsweis konstanter Funktionen streckenweis lineare benutzt werden.

Hellinger (Frankfurt a. M.).

Ciorănescu, Nicolas: Une équation intégrale singulière et quelques généralisations des fonctions de Bessel. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 38, H. 1, 11—15 (1936).

Durch sukzessive Approximationen wird die Volterrasche Gleichung

$$x^k \varphi(x) = \lambda \int_0^x (x^2 - s^2) \varphi(s) ds + ax^p \quad (k > 0)$$

gelöst. Für $k = 1$, $a = -\lambda = \frac{1}{2}$, $p = 2$ ist die Besselfunktion $J_1(x)$ eine Lösung.

W. Feller (Stockholm).

Tricomi, Francesco: Autovalori e autofunzioni del nucleo di Hankel. Atti Accad. Sci. Torino 71, 285—291 (1936).

The author proves that the characteristic values of the kernel $J_\nu(\sqrt{xy})$, $0 < x, y < \infty$, are ± 1 , each of infinite order, and develops a method of determining the analytic characteristic functions based upon his previous reduction of the Hankel transform to a Laplace transform (this Zbl. 13, 398). — It should be remarked that this method is closely related to the second method of Hardy and Titchmarsh in their paper on self-reciprocal functions [Quart. J. Math., Oxford Ser. 1, 166—231 (1930)]. The analysis is largely formal, so that a comparison of the results with the precise ones of Hardy and Titchmarsh is scarcely possible. E. Hille (New Haven, Conn.).

Andreoli, G.: Funzioni di composizione di 2^a specie, funzioni di matrici infinite. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 281—286 (1936).

Previously (this Zbl. 12, 289) the author found an isomorphism between kernels of Goursat type and finite matrices relative to addition and multiplication, matrix multiplication corresponding to Volterra composition of the second kind. The present paper shows that a similar isomorphism between kernels not of Goursat type and infinite matrices exists only formally, because of the failure of convergence requirements.

MacDuffee (Madison).

Raff, Hermann: Lineare Transformationen beschränkter integrierbarer Funktionen. I. Mitt. Math. Z. 41, 605—629 (1936).

Es wird ein sehr allgemeines Theorem über Limitierungsverfahren aufgestellt, das den bekannten Satz von O. Toeplitz [Prace mat. fiz. 22, 113—119 (1911)] und seine verschiedenen Verallgemeinerungen von I. Schur, L. Silverman, T. Kojima, H. Hahn und K. Knopp umfaßt. \mathfrak{M} sei eine lineare meßbare Menge, τ ein Häufungspunkt von \mathfrak{M} , B sei die Klasse aller auf \mathfrak{M} erklärten komplexwertigen Funktionen $f(t)$, die auf \mathfrak{M} beschränkt und für jedes Intervall i über dem Durchschnitt $i \cap \mathfrak{M}$ integrierbar sind. \mathfrak{Y} sei eine beliebige Menge komplexer Zahlen, η ein Häufungspunkt von \mathfrak{Y} .

$\varphi(t, y)$ sei eine für jedes t von \mathfrak{M} und jedes y aus \mathfrak{Y} erklärte komplexe Funktion mit evtl. unendlichem Funktionswert. Die Transformation (1) $g(y) = \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y) f(t) dt$ heißt regulär, wenn für jedes mit $t \rightarrow \tau$ (auf \mathfrak{M}) konvergentes $f(t)$ aus B $g(y)$ in einer Umgebung von η existiert und $\lim_{y \rightarrow \eta} g(y) = \lim_{t \rightarrow \tau} f(t)$ ist. Notwendig und hinreichend für Regularität sind die 4 Bedingungen: 1. $\varphi(t, y)$ ist für jedes y einer Umgebung von η absolut integrierbar und es gibt ein $M > 0$, daß für jedes y einer Umgebung von η $\int |\varphi(t, y)| dt \leq M$ gilt. 2. Für jedes Intervall i , von dem τ positiven Abstand hat, existiert $\lim_{y \rightarrow \eta} \int_{i \cap \mathfrak{M}} \varphi(t, y) dt$ und hat den Wert 0. 3. Für jede Folge von meßbaren Teilmengen \mathfrak{N}_x von \mathfrak{M} , so daß τ von einem \mathfrak{N}_x positiven Abstand hat, ferner \mathfrak{N}_{x+1} Teilmenge von \mathfrak{N}_x und $\lim_{x \rightarrow \infty} (\text{Maß}(i \cap \mathfrak{N}_x)) = 0$ für jedes i ist, gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{N}_x} |\varphi(t, y)| dt = 0$. 4. $\lim_{y \rightarrow \eta} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y) dt$ existiert und hat den Wert 1. — Weitere Sätze, wann die Transformation (1) konvergenz-erzeugend, annullierend, konvergenzerhaltend ist. *G. Köthe* (Münster i. W.).

Kantorovič, L. v.: The elements of the theory of functions of a real variable with values belonging to a semi-ordered linear space. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 2, 365 bis 369 (1936).

Es werden verschiedene Klassen von Funktionen $y = f(t)$ betrachtet, wobei t das reelle Intervall $\langle a, b \rangle$ durchläuft und y einem linearen teilweise geordneten Raume angehört. Diese Klassen entsprechen den Eigenschaften der Stetigkeit, der Absolutstetigkeit, der Lipschitzbedingung usw. Eine zweite Serie von Funktionsklassen bekommt man, indem man „ideale“ Funktionen benutzt, einen Begriff, den wir hier nicht näher erklären wollen. Durch entsprechende Normierung jeder dieser Funktionsklassen werden Konvergenzbetrachtungen ermöglicht. Nunmehr kann auch der Integralbegriff eingeführt werden, und mit seiner Hilfe lassen sich verschiedene Sätze der Analysis auf solche Funktionsklassen übertragen. Z. B. gilt in gewissem Sinne der Riesz-Fischersche Satz und die Parsevalsche Identität. *Schauder* (Lwów).

Funktionentheorie:

Heffter, Lothar: Vom Cauchyschen Integralsatz zur Cauchyschen Integralformel. J. reine angew. Math. 175, 240—245 (1936).

Verf. beweist: Es sei G ein Gebiet der komplexen Ebene, $f(z)$ stetig in G , $h(z)$ stetig differenzierbar in G ; wenn dann für jedes in G gelegene achsenparallele Rechteck R

$$\int_R f(z) dz = 0, \quad \text{so gilt auch} \quad \int_R f(z) h(z) dz = 0.$$

Zum Beweise wird, wie üblich, R in kleine Rechtecke unterteilt, auf denen man $h(z)$ durch lineare Funktionen approximieren kann. — Setzt man $f(z) = 1$, so ergibt die Formel den Cauchyschen Integralsatz. Setzt man $h(z) = \frac{1}{t - z}$, so folgt aus einer leichten Rechnung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{f(z)}{z - t} dz,$$

falls t in R liegt. Hieraus folgt alsdann der Satz von Morera. *Hans Heilbronn*.

Szegő, Gabriel: Some recent investigations concerning the sections of power series and related developments. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 505—522 (1936).

Es handelt sich um einen Vortrag, den der Verf. auf dem Kongreß 1936 der Amer. Math. Soc. gehalten hat. Es wird ein kurzer Bericht über die Entwicklung gegeben, den die Weierstrasssche Theorie der Potenzreihen in neuerer Zeit bei verschiedenen Funktionsklassen (z. B. beschränkte Funktionen, Funktionen positiven Realteils, schlichte Funktionen u. a.) genommen hat. *Rogosinski* (Königsberg i. Pr.).

Broggi, U.: Su di un corollario del teorema di Vivanti-Pringsheim e su di una mia nota. *Rev. mat. hisp.-amer.*, II. s. 11, 81—86 (1936).

The first part is a recapitulation of previous results (this Zbl. 12, 350): Every entire function of exponential type is representable by a series of Laguerre polynomials $\sum_0^\infty a_n L_n(\lambda z)$, uniformly convergent in every finite domain for a suff. large $\lambda > 0$.

(The author remarks that this does not follow from Wigert's Abel summability theorem, but he fails to notice that it is an immediate consequence of another theorem of Wigert's, viz. the theorem quoted by the ref. in the review cited above.) The main new result is that the point $z = \alpha$ on the line of convergence of

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \varphi(t) dt$$

is singular, if there exists a β such that $\alpha + \beta > 0$ and in the expansion

$$\int_0^\infty e^{-t(z-\beta)} \varphi(t) dt = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^\infty B_n \left[\frac{z - 2(\alpha + \beta)}{z} \right]^n$$

the coefficients $(-1)^n B_n$ are located in a fixed angle of opening $< \pi$. *E. Hille.*

Takahashi, Shin-ichi: On the necessary and sufficient condition for the multi-valency of an analytic function regular in the unit circle. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 18, 353—355 (1936).

Rogosinski, Werner: Über den Wertevorrat einer analytischen Funktion, von der zwei Werte vorgegeben sind. *Compositio Math.* 3, 199—226 (1936).

Dans deux mémoires précédents (voir ce Zbl. 2, 272; 7, 167) l'auteur avait appliqué le principe de Lindelöf à l'étude des valeurs prises par les fonctions méromorphes dans un cercle et dont la dérivée a une valeur donnée en un point intérieur donné. Il emploie ici les mêmes méthodes pour étudier le domaine couvert par les valeurs d'une fonction $f(z)$, méromorphe pour $|z| < 1$, dont l'écart des modules en deux points donnés intérieurs a une valeur également donnée. [Cette modification des hypothèses a d'abord été considérée par H. Bohr (1923) puis par divers auteurs, voir Valiron (*Bull. Sci. math.* 1927, 34) et Montel (ce Zbl. 6, 351). Note du Réf.] Parmi les résultats obtenus signalons ceux-ci relatifs aux fonctions $w = f(z)$ holomorphes pour $|z| < 1$ et telles que $f(0) = 0$, $f(\zeta) = 1$, $0 < \zeta < 1$. I. Si l'on trace la courbe définie par $4zw = (1+z)^2$, $|z| = \zeta$, $f(z)$ prend sur chaque rayon $\arg w = \text{const}$ une valeur au moins qui n'est pas intérieure à cette courbe. II. Si $C \neq 0, \pm 1$, toute $f(z) \neq C$ prend au moins une valeur telle que

$$|w - C| \geq \sqrt{|C||C - 1|} \exp \left[\frac{1}{2} \sqrt{\log^2 \left| \frac{C-1}{C} \right| + \left(\frac{1}{\zeta^2} - 1 \right) \left| \log \frac{C-1}{C} \right|^2} \right]$$

III. Si $|f(z)| < M$, $f(z)$ couvre le domaine (ou les deux domaines) contenant l'un des points 0, 1 et limités par la courbe définie par

$$M^2 \frac{1-w}{|w|^2 - wM^2} = \exp \left[\log \frac{M}{|w|} \cdot \frac{2\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta} \right], \quad \left| \Im \left(\frac{2\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta} \right) \right| \leq \frac{\pi}{\log \left| \frac{M}{w} \right|}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

G. Valiron (Paris).

Bohr, Harald: Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. VI. *Danske Vid. Selsk., Skr.* 14, Nr 2, 1—8 (1936).

In der ursprünglichen Darstellung der Theorie der analytischen fastperiodischen Funktionen [*Acta math.* 47 (1926)] hat der Verf. eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes auf analytische fastperiodische Funktionen bewiesen, und zwar unter Heranziehung eines recht tiefliegenden Satzes von Iversen. In der vorliegenden Note wird diese Verallgemeinerung des Picardschen Satzes wesentlich einfacher bewiesen, nämlich durch Übertragung einer neuerdings vom Verf. gefundenen Variante des

Lindelöfschen Beweises des Picardschen Satzes, für welche auf eine demnächst erscheinende Note in einer russischen Festschrift verwiesen wird. (V. vgl. dies. Zbl. 11, 299.) *Börge Jessen* (Fine Hall, N. Y.).

Bermant, A.: Sur un théorème de P. Montel. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 3—7 (1936).

Il s'agit de ce théorème: Considérons la famille (F) de fonctions $w = F = z + \dots$ holomorphes pour $|z| < 1$ et une suite d'anneaux D_n , $r_n < w < r'_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r'_n = 0$. A chaque D_n correspond un D_{n+p} tel que toute fonction F ne couvrant pas D_n couvre D_{n+p} . L'auteur montre que l'emploi du principe de Lindelöf et des fonctions modulaires permet de généraliser et de trouver les valeurs exactes des constantes figurant dans certains des th. sur le recouvrement ainsi obtenus (comp. Bermant et Lavrentieff, ce Zbl. 13, 69). Par exemple, si E et E' sont deux ensembles fermés finis sans points communs, les fonctions de la famille (F) couvrent ou bien l'ensemble kE ou bien kE' , pourvu que $0 < k < \frac{1}{L(E, E')}$, $L(E, E')$ étant le maximum du module de la dérivée d'un certain ensemble de fonctions modulaires. On a de même des propositions analogues au th. de Montel ou de Landau (Rend. Circ. mat. Palermo 1929, 347). En utilisant l'approximation d'Hurwitz, l'auteur donne une borne de la constante de Landau et des résultats sur le domaine couvert par les valeurs de F . Parmi ses énoncés citons celui-ci [déjà obtenu à peu près par F. Marty (voir Montel, Leçons sur les f. univalentes et multivalentes, p. 120—121; ce Zbl. 6, 351); Note du Réf.]: Toute fonction F couvre soit un point α , $\alpha > 0$, soit un intervalle ouvert de l'axe réel négatif $(\beta, 0)$ avec $\beta \leq \alpha w_1$, w_1 étant la racine négative de l'équation $2\alpha \Im[\nu(1-w)] = |w-1| |\nu'(1-w)|$, et $\nu(t)$ une branche de la fonction inverse de la fonction modulaire elliptique. Comme application, l'aut. complète un th. de Rogosinski (ce Zbl. 2, 272) et étend sous la forme suivante un th. de Szegö: Les valeurs w d'une fonction (F) couvrent un intervalle ouvert contenant $w = 0$ et de longueur au moins égale à 0,456 d'une droite quelconque passant par $w = 0$. Il donne aussi des prop. analogues où les segments passant par $w = 0$ sont remplacés par certains arcs $|z| = \text{const.}$ *G. Valiron* (Paris).

Tumura, Yosiro: Sur quelques propriétés d'une classe simple des fonctions méromorphes. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 173—181 (1936).

Das Hauptergebnis des Verf. ist der Nachweis des folgenden Satzes: In der von einer gebrochenen Funktion erzeugten Riemannschen Fläche sei eine gewisse offene Kreisscheibe K nur von Flächenstücken überdeckt, deren Blattzahl ein festes p nicht übertrifft. Dann verschwindet für jedes w aus K der Nevanlinnasche Defekt $\delta(w)$, kein Wert w ist als Ausnahmewert. Dieser für die Wertverteilungslehre grundsätzlich wichtige Satz ist zuerst von Collingwood angeschnitten [C. R. Acad. Sci., Paris 179, 1125 (1924)] und dann allgemeiner von Selberg behandelt worden (dies. Zbl. 10, 123; 4, 11), in Sonderfällen mit einfacherer Methode von Ullrich (dies. Zbl. 4, 119). Verf. entwickelt hier einen neuen Beweis, für den eine Übertragung der Normalscharenlehre auf höchstens p -deutige Funktionen herangezogen wird. Diese ist auch an sich von Interesse. — Die Arbeit schließt mit der Bemerkung: Die Werte von K können auch niemals zu jener Ausnahmemenge gehören, wo der Grenzexponent $\varrho(\Delta, w)$ für eine Richtung Δ den von Valiron eingeführten mittleren Grenzexponenten $\varrho(\Delta)$ zu dieser Richtung übertrifft (vgl. dies. Zbl. 1, 21). *Ullrich* (Gießen).

Kobayashi, Zen-ichi: The meromorphic function with every complex number as its asymptotic value. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 3, 89—110 (1936).

Verf. baut einfachzusammenhängende Riemannsche Flächen auf mit logarithmischen Windungspunkten und mit Randstellen, die durch Häufung solcher Windungspunkte entstehen derart, daß über jeder Stelle der w -Ebene Randstellen der Fläche liegen, und zwar sogar kontinuum viele. Dazu benutzt er die von ihm schon früher

in einigen Arbeiten entwickelte Art, Flächen durch topologische Bäume zu kennzeichnen; diese ist der Nevanlinna-Elfvingschen Methode in der Richtung überlegen, daß sie leicht für Flächen mit unendlich vielen Windungssorten brauchbar ist; auf Grund seines Typenkriteriums (dies. Zbl. 11, 169) und einer Methode des Ref., nämlich durch Einschalten vieler schlichter Blätter (dies. Zbl. 9, 404), kann er erzwingen, daß die Flächen grenzpunktartig werden. Damit ist eine neue Klasse gebrochener (und ganzer) Transzendenten aufgestellt, die jede komplexe Zahl — und sogar jede auf Kontinuum vielen „getrennten“ Zielwegen — als Zielwert anstreben. Das Verfahren Kobayashis ist sehr schmiegsam und dürfte noch andere wichtige Anwendungen erlauben.

Ulrich (Gießen).

Minami, Unai: On the univalence and multivalence of a class of meromorphic functions. Proc. Imp. Acad. Jap. 12, 33—35 (1936).

A partir d'un théorème de Montel (voir ce Zbl. 5, 290; 12, 155) l'auteur démontre cette proposition: $g(z)$ étant holomorphe dans un domaine convexe A , α une constante arbitraire et p un entier positif donné, on suppose que: 1° Si z décrit A , $g^{(p)}(z)$ reste dans un domaine convexe B ; 2° il existe un domaine C défini par $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$, $r \leq z \leq r'$ dont le transformé par la fonction $(-1)^{p+1} p! \alpha z^{-p-1}$ n'a pas de points communs avec B . Alors la fonction $\frac{\alpha}{z} + g(z)$ est au plus p fois valente dans la portion commune à A et C . Si C est le cercle $|z| \leq r'$, on retombe sur un résultat de K. Kimura (Osaka Shijodanwakai, n° 30); si C est défini par $|z| \geq r$, on généralise un théorème de Sato correspondant à $p = 1$ (voir ce Zbl. 12, 171), si C est le plan privé du point à l'infini et $\alpha = 0$, l'énoncé contient un résultat de Ozaki (voir ce Zbl. 12, 24).

G. Valiron (Paris).

Lee, K. P.: On the Borel's directions of meromorphic functions of infinite order. Jap. J. Math. 13, 39—48 (1936).

L'auteur établit les théorèmes énoncés sans démonstrations dans la première partie d'une Note précédente (voir ce Zbl. 14, 120). Signalons celui-ci: Etant donnée une fonction méromorphe $f(z)$ d'ordre infini $\rho(r)$ (au sens de Hiong, voir ce Zbl. 12, 264), considérons la famille de f. méromorphes $\Pi(z)$ telle que, pour $n > n(f)$, $T[(1 + \alpha(n))r_n, \Pi] < \alpha(n)^4 T(r_n, f)$, $r_n \rightarrow \infty$, $r_n^{\rho(r_n)} = T(r_n, f)$, $\alpha(n)$ tendant vers 0. Il existe une suite de cercles $\Gamma(n): |z - z_n| < \alpha(n)|z_n|$, $r_n < |z_n|(1 + \beta_n)^2 < r_n(1 + \beta_n)^2$, tels que, dans $\Gamma(n)$ le nombre des zéros de $f(z) - \Pi(z)$ est au moins égal à $\alpha(n)^2 T(r_n, f)$ si n est assez grand, sauf au plus pour deux fonctions exceptionnelles. $\beta(n)$ est un infiniment petit tel que $\rho\left(\frac{r_n}{\beta(n)}\right) \log[1 + \beta(n)] > \log 24$, et le théorème s'applique dès que n dépasse un nombre dépendant du comportement à l'origine de $\Pi(z)$. L'auteur en déduit, par les méthodes connues, l'existence de suites de cercles de remplissage et de directions de Borel communes à toutes les fonctions de certaines familles $f(z) - \Pi(z)$.

G. Valiron (Paris).

Tzitzieva, Georges: Sur les fonctions rationnelles osculatrices à une fonction analytique. Rev. math. Union Interbalkan. 1, 1—9 (1936).

L'A. dit que deux fonctions analytiques $f(z)$ et $g(z)$, holomorphes autour du point $z = z_0$, ont en ce point un contact d'ordre n , si l'on a $f(z_0) = g(z_0)$, $f'(z_0) = g'(z_0)$, ..., $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$; et il étudie les fonctions rationnelles de certains types ayant un contact d'un ordre suffisamment élevé avec une fonction analytique $f(z)$ assignée, dans un point $z = z_0$ de la région où elle est holomorphe. L'A. commence par prouver qu'il y a toujours n fonctions rationnelles monopolaires de degré n osculatrices à $f(z)$ en $z = z_0$, c'est-à-dire n fonctions rationnelles de la forme

$$\frac{c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n}{(z - \alpha)^n}$$

ayant avec $f(z)$ en $z = z_0$ un contact d'ordre $n + 1$. Les n pôles de ces n fonctions monopolaires constituent un groupe G_n , et on a que (pour n quelconque ≥ 2) G_n est

apolaire au groupe formé par G_{n-1} avec z_0 ou au groupe formé par G_{n-2} avec z_0 compté deux fois, suivant que n est pair ou impair (pour $n = 2$ cette proposition remonte à E. J. Wilczynski, J. Math. pures appl. 1922/23); si G_n possède un point α multiple suivant $k+1$, il existe une fonction monopolaire de degré $n-k$ avec le pôle α et surosculatrice d'ordre k , c'est-à-dire ayant en $z = z_0$ un contact d'ordre $n+1$ avec $f(z)$. — G_1 est réduit à un seul point, jouant un rôle spécial dans l'étude des propriétés de courbure des courbes qui sortent des points z_0 et $Z_0 = f(z_0)$ et se correspondent dans la représentation conforme $Z = f(z)$. La fonction analytique la plus générale admettant une fonction rationnelle monopolaire de degré n osculatrice en $z = z_0$ et telle que son pôle soit fixe dans un point α lorsque z_0 varie, est une fonction rationnelle monopolaire de degré n avec le pôle α . — L'A. s'occupe enfin brièvement des fonctions rationnelles à n pôles simples osculatrices à $f(z)$ en $z = z_0$. Tous les calculs sont effectués avec simplicité et élégance remarquables.

Beniamino Segre (Bologna).

Nisigaki, Hisami: Eine Klasse von hyperkomplexen Funktionen einer hyperkomplexen Veränderlichen. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 25, 281—313 (1936).

Verf. behandelt „analytische“ Funktionen von der Klasse C_1 in der vollständigen Matrixalgebra \mathfrak{S} über dem Körper der komplexen Zahlen. $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{nn}$ sei die Basis von \mathfrak{S} . $Y = F(X) = \sum y_{ik} E_{ik}$ heißt dabei an der Stelle $X_0 = \sum x_{ik}^0 E_{ik}$ analytisch von der Klasse C_1 , wenn die $y_{ik} = \varphi_{ik}(x_{11}, \dots, x_{nn})$ eineindeutige und analytische Funktionen der x_{ik} an der Stelle x_{ik}^0 sind und für das Differential $dY = U \cdot dX \cdot V$ gilt; dabei sollen die $u_{i\mu}$ und $v_{j\mu}$ der U und V (durch $F(X)$ und X_0 allein bestimmte) analytische Funktionen der x_{ik} sein. — In der vorliegenden Arbeit werden nun alle analytischen Funktionen von der Klasse C_1 zurückgeführt auf Lösungen partieller Differentialgleichungen. — Zum Schluß werden die eineindeutigen Abbildungen behandelt, die durch eine gewisse Unterklasse der analytischen Funktionen der Klasse C_1 vermittelt werden.

Behnke (Münster i. W.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

● Bond, W. W.: Probability and random errors. London: E. Arnold 1936. VIII, 141 pag. 10/6.

● Deltheil, R.: Erreurs et moindres carrés. Tome 1. Les principes de la théorie des probabilités. Fasc. 2. Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1936. 161 pag. Frs. 30.—.

Jeffreys, Harold: On some criticisms of the theory of probability. Philos. Mag., VII. s. 22, 337—359 (1936).

Neue Zusammenfassung der Argumente zugunsten der Wahrscheinlichkeitstheorie des Verf., die hier darzulegen unmöglich ist. Es genüge die Feststellung, daß sich die Theorie in der Richtung des Keynes'schen Versuches bewegt und daß die Wahrscheinlichkeit als „an assesment of a degree of knowledge with respect to a proposition“ definiert wird. Insbesondere muß man prinzipiell auch solchen Dingen Wahrscheinlichkeiten zuschreiben, von denen man nichts weiß (S. 343). Daß eine solche Theorie eine mathematische Grundlegung a priori ausschließt, scheint plausibel. W. Feller.

Wishart, J., and H. O. Hirschfeld: A theorem concerning the distribution of joins between line segments. J. London Math. Soc. 11, 227—235 (1936).

The authors consider the following: a given line interval is divided into a number n of segments each of which is black or white. The probabilities of each kind are given as constants independent of n . The problems are (a) to find the distribution of the probabilities for any number, ν , of black-white joins among the n segments, and (b) to investigate the limiting form (if any) of this distribution for large n . Explicit solutions are obtained, the limiting form being a normal error law whose constants are computed. The methods used involve moment generating functions, the Fourier transform, and explicit integrations with close estimates on inequalities required to establish uniform convergence.

Albert A. Bennett (Providence).

- Nayer, P. P. N.:** An investigation into the application of Neyman and Pearson's L_1 test, with tables of percentage limits. *Statist. Res. Mem., Univ. London* 1, 38—51 (1936).
- Welch, B. L.:** Note on an extension of the L_1 test. *Statist. Res. Mem., Univ. London* 1, 52—56 (1936).

The use of the method of likelihood of Neyman and E. S. Pearson suggests the criterion L_1 expressible as the ratio of the weighted geometric mean of the sample variances to their weighted arithmetic mean. The object of the first paper is (a) to investigate in some detail the previously proposed adequacy of a suitable Type I curve for representing the distribution of L_1 (when H_1 is true), (b) to provide tables of 5% and 1% probability levels for L_1 in case the number of observations per sample is the same throughout, and (c) and to consider how far the probability levels so obtained may serve where the average number of observations per sample is used, when the number of observations varies from sample to sample. The author concludes on several grounds that save for extreme cases, further results here obtained tend to confirm the assumption that Type I curves serve adequately to describe the desired distribution. Several probability level tables (to 3 figures) are computed, and are found to serve adequately (by using means) for most cases of varying numbers of observations. — The second paper deals with and extends results previously given for several populations but with only one independent variable for each population, by the author (see this *Zbl.* 11, 220) and by P. P. N. Nayer in the preceding paper. The present article considers the case of several degrees of freedom. The L_1 criterion of equality of variance for the several groups is studied under the hypothesis that in each population the regression equation is linear. Under the condition that the number of observations is the same for each group, the tables of 5% and 1% limits for L_1 given by Nayer apply at once when expressed in terms of total degrees of freedom. In an illustrative example, application is made to data in the manufacture of spectacle glasses, as contained in a forthcoming paper of C. E. Gould and W. M. Hampton.

Albert A. Bennett (Providence).

Neyman, J., and E. S. Pearson: Sufficient statistics and uniformly most powerful tests of statistical hypotheses. *Statist. Res. Mem., Univ. London* 1, 113—137 (1936).

In testing statistical hypothesis, we may make two kinds of errors: (1) Reject the hypothesis when true, (2) accept it when false. The probability of the first kind of error determined by the hypothesis tested, say H , is called the size of the critical region. Two tests are said to be equivalent if based on critical regions of the same size. — The probability of rejecting a hypothesis, H , when the true hypothesis is an alternate simple hypothesis, say H' is described as the "power of the test with regard to H' ". The "most powerful test for H with regard to H' ", is the test whose power is greater than that of any other equivalent test, and the critical region yielding the most powerful test with regard to H' has been termed the best critical region for H with regard to H' . — Denote by Ω the set of all simple hypotheses which are considered admissible. The test of a hypothesis, H_0 , is said to be "uniformly most powerful with regard to Ω ", if it is the most powerful test with regard to every hypothesis included in Ω , alternate to H_0 . — The problem of the most powerful tests, in the case in which all admissible hypotheses are associated with a probability law, say $p(x_1, x_2, x_3)$, of the same form, except in the values of certain parameters, has been discussed by R. A. Fisher who connected it with the theory of sufficient statistics. He stated when a uniformly most powerful test exists that (1) a sufficient statistic must exist, and be constant on the corresponding best critical region, (2) the number of independent parameters which are specified by the alternative hypotheses is one only. — These statement are discussed rather fully in the present paper beginning with definitions and certain properties of sufficient statistics. In treating the problems of testing hypothesis, the authors have found it necessary to use not only the conception of sufficient statistics but to introduce also a new conception which, apparently

has not been considered before, namely the conception of a shared sufficient statistic, and they have found it desirable to use the expression "specific sufficient statistic" for Fisher's original definition of a sufficient statistic. — A considerable number of propositions are established. The main conclusions are that: (1) When a system of uniformly most powerful tests exists and certain other conditions are satisfied, then sufficient statistics either specific or shared must also exist, (2) when a system of uniformly most powerful tests exists, there may be no unique sufficient statistic at all (3) when a sufficient statistic exists, a system of uniformly most powerful tests may exist or not. — These conclusions do not agree with the opinion expressed by R. A. Fisher stated above to the effect that the problem of uniformly most powerful tests is covered by that of sufficient statistics. *H. L. Rietz (Iowa).*

Neyman, J., and B. Tokarska: Errors of the second kind in testing „students“ hypothesis. *J. Amer. Statist. Assoc.* **31**, 318—326 (1936).

By an error the second kind is meant the acceptance of a false hypothesis. The importance of this class of errors as a basis for a rational choice has been recognized for some time, and Student's ratio affords a simple criterion to be considered. The first table of the probabilities of the second kind in testing Student's asymmetrical form of hypothesis was published by St. Kolodziejczyk in 1933. A somewhat more extensive table was published by J. Neyman with cooperation of K. Iwaszkiewicz and St. Kolodziejczyk in 1935. Since then it has become clear that the rational planning of experiments to be dealt with statistically requires a different type of table. Such a table is given in the present paper for the number of replications $n = 1$ to 30, and for levels of significance a 0.01 and 0.05. The table gives values of ρ , a standardized measure of the error of the second kind, corresponding to the probability, $p_{ii}(d, p)$, for assigned values of a and n . The present tables thus answer the question: What is the standardized size of the difference between the true population mean, a , and the hypothetical upper bound, a_0 , which will remain undetected with a given probability p_{11} ? *H. L. Rietz (Iowa).*

Stouffer, Samuel A.: Evaluating the effect of inadequately measured variables in partial correlation analysis. *J. Amer. Statist. Assoc.* **31**, 348—360 (1936).

The purpose of the present paper is to seek both a logical basis and a simple arithmetical procedure for measuring the effect of the use of two indexes, each of one or more variables, in partial and multiple correlation analysis, and for estimating the probable effect if two indexes, not available, could be secured. Assume s variables, of each of which there are two measures X and X' , based on n cases. The problems are to compare the results from the use of both X_i and X'_i with the results from the use of X_i alone. The paper presents three different quantitative approaches to the problem apparently suggested by applications to sociological problems. — In the first approach, a coefficient of combined partial correlation coefficient is introduced, and formulas somewhat similar in appearance to those in ordinary correlation analysis are obtained. In the second approach, a fourth variable — the deviation of X_1 from its predicted value from its regression function is introduced. In the third approach, the problem is reduced from one of $2s$ dimensions to one of s dimensions, and the situation is considered in which a particular index number is inadequate. Concrete illustrations of the analysis of certain family data are presented. This helps the reader to follow the setting of the theoretical problem. *H. L. Rietz (Iowa).*

Raghavan Nair, K.: A note on the existence of lagging correlations between two random series. *J. Roy. Statist. Soc., N. s.* **99**, 559—566 (1936).

Verf. betrachtet zuerst im Anschluß an frühere Arbeiten von O. Anderson (*Biometrika* **10**, 269—279 u. **18**, 293—320) und G. U. Yule (*J. Roy. Statist. Soc.* **84**, 497—537) die sogenannten „serial correlations“ in einer „random series“ [das ist eine Reihe von zufälligen Größen x_m ($m = 1, \dots, N$), zwischen denen keine Korrelationen bestehen]. Die „serial correlations“ zwischen den Differenzen k -ter Ordnung der Reihe

werden durch die Koeffizienten $k^r_{m(m+n)}$ gemessen, wo $k^r_{m(m+n)}$ den Korrelationskoeffizienten der Reihen $\Delta^k x_m$ und $\Delta^k x_{m+n}$ ($m = 1, \dots, N-k$) bezeichnet; Verf. leitet für diese den Ausdruck

$$k^r_{m(m+n)} = (-1)^n \frac{k(k-1) \dots (k-n+1)}{(k+1)(k+2) \dots (k+n)}$$

unter der Voraussetzung her, daß der Einfluß der k ersten und der k letzten Glieder der Reihe vernachlässigt werden kann. — Es werden demnächst zwei „random series“ der soeben angegebenen Art x_m und y_m ($m = 1, \dots, N$) betrachtet, zwischen deren Glieder Korrelationen („lagging correlations“) bestehen, die mittels der Korrelationskoeffizienten r_n bzw. r_{-n} gegeben sind, wo r_n die Korrelation der Reihen x_m und y_{m+n} ($m = 1, \dots, N-k$) und r_{-n} die Korrelation der Reihen x_{m+n} und y_m ($m = 1, \dots, N-k$) messen. Wenn k^r_{xy} den Korrelationskoeffizienten der Reihen $\Delta^k x_m$ und $\Delta^k y_m$ bezeichnet, so ist

$$k^r_{xy} = r_0 + (r_1 + r_{-1})k^r_{m(m+1)} + \dots + (r_k + r_{-k})k^r_{m(m+k)}.$$

Schließlich wird der Fall untersucht, wo nur eine „lagging correlation“, durch r_n charakterisiert, vorhanden ist; es wird gezeigt, daß diese Korrelation zu einer Reihe von entsprechenden „lagging correlations“ zwischen den Differenzen k -ter Ordnung $\Delta^k x_m$ und $\Delta^k y_{m+p}$ Anlaß gibt.

W. Simonsen (Kopenhagen).

Gini, Corrado: Dell'influenza che il raggruppamento delle singole modalità esercita sul valore di alcuni indici statistici nel caso di serie sconnesse. *Metron* 12, 3—34 (1936).

Walter, K.: Über die Wahrscheinlichkeit von Perioden. *Astron. Nachr.* 259, 205 bis 216 (1936).

Gumbel, Emil-J.: Les distances extrêmes entre les émissions radioactives. *C. R. Acad. Sci., Paris* 203, 354—357 (1936).

Distance between marks on a band of paper moving at constant rate and measuring intervals between radioactive emissions follow an exponential distribution. A system of 8450 observations on polonium made by P. Chevalier, is subdivided into 80 sets of 105 or 106 distances each. The author's theory of extreme elements (see this Zbl. 11, 361) is shown to fit the observed maxima adequately. A graph exhibits this accord.

Albert A. Bennett (Providence).

Smolensky, P.: De l'emploi des fonctions biométriques dans la sélection des risques. *Verzekeerings-Arch.* 17, (1)—(15) (1936).

L'auteur analyse les fonctions biométriques caractérisants les risques tarés, c'est à savoir l'intensité de décès, la probabilité de survie, la vie probable et la vie moyenne. Il démontre le fait, que les actuaire n'ont pas fourni aux médecins un moyen satisfaisant pour caractériser en général un risque taré; les chiffres des actuaire expriment l'aggravation de la mortalité en pourcentage de la mortalité normale, tandis que la sélection médicale est limitée à une période relativement courte. L'auteur arrive au résultat, que c'est la vie moyenne, qui pourrait servir aux médecins réviseurs comme une classification satisfaisante; cette vie moyenne permet à l'auteur d'exprimer un taux de mortalité augmenté d'une quantité constante. Il déduit des relations applicables pour l'évaluation médicale des risques tarés et cela pour la réduction de la vie moyenne et de la rente. Certaines relations sont illustrées dans les tables numériques.

Janko (Praha).

Scholz, Edmond: Über die statistische Behandlung von Krankheiten, deren Manifestation altersabhängig ist. *Deutsche Math.* 1, 482—485 (1936).

Taucer, R.: Applicazioni attuariali dello schema dei gruppi. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 7, 265—279 (1936).

In Fortsetzung seiner in derselben Zeitschrift erschienenen Arbeit: „I fenomeni di selezione e la teoria dei gruppi“ (dies. Zbl. 13, 314) gibt Verf. eine versicherungstechnische Anwendung seines „Gruppenschemas“, indem er annimmt, daß dem Angehörigen einer Gruppe während der Angehörigkeit zu dieser Gruppe eine Rente gezahlt oder von ihm eine Prämie eingehoben wird, deren Höhe sowohl vom erreichten Alter als auch

vom Eintrittsalter in die Gruppe abhängt; außerdem wird für den Übergang zu einer anderen Gruppe die Auszahlung einer Versicherungssumme vorgesehen, deren Höhe vom erreichten Alter und von der Gruppe, in die der Übertritt erfolgt, abhängt. Die Aufgabe, die mathematischen Reserven dieser allgemeinen Versicherungsform zu berechnen, wird durch Zurückführung auf ein System von Volterraschen Integralgleichungen zweiter Art gelöst. Die Arbeit schließt mit einer Anwendung der abgeleiteten Formeln auf die Invaliditätsversicherung.

Robert Frucht (Trieste).

Pankraz, Otomar: Sur la réserve mathématique dans l'assurance sociale. Mém. Soc. Roy. sci. Bohême 1935, Nr 13, 1—10 u. franz. Zusammenfassung 11 (1936) [Tschechisch].

Si, dans un certain ensemble des vies assurées, il y a à disposition une réserve mathématique individuelle ${}_t\text{--}{}_oV_x$ l'auteur déduit pour l'ensemble G_x qu'adjoignent les personnes de l'âge égal x , la totalité des réserves mathématiques du groupe G_x au moment t , et il obtient la formule $W_x(t)$ qui résulte d'une certaine opération fonctionnelle linéaire, faite sur la fonction ${}_tV_x$. Pour déduire des conditions pour la réserve $W_x(t)$, l'auteur construit l'idée auxiliaire de la réserve mathématique moyenne ${}_t\bar{V}_x$ de l'ensemble G_x , au moment t qui correspond à l'équation intégrale de Volterra de la même structure que l'équation pour la réserve individuelle. *Janko* (Praha).

Spring, Oscar Werner: Beiträge zur mathematischen Theorie der privaten und sozialen Krankenversicherung. Bern: Diss. 1934. 107 S.

In den ersten zwei Kapiteln der ausführlichen Arbeit werden grundsätzlich bekannte Rechnungsmethoden der privaten Krankenversicherung in einer durch Einführung neuer, zweckmäßiger Rechnungsgrößen (neue Intensitäten, Durchschnittsleistungen) besonders übersichtlich gestalteten Form vorgetragen. Das dritte Kapitel enthält eine neue Darstellung der mathematischen Struktur der sozialen Krankenversicherung unter Zugrundelegung des Begriffes der Durchschnittsreserve. Überall wird das kontinuierliche Verfahren angewendet.

Birnbaum (Lwów).

Haafte, M. van: Période de carence au lieu de surprime. Verzekeerings-Arch. 17, (79)—(83) (1936).

Verf. schlägt vor, solchen Versicherten, die wegen erhöhter Sterblichkeit nur mit Prämienerrhöhung versicherbar erscheinen, aber diese Prämienerrhöhung nicht annehmen wollen, die Annahme zur Normalprämie durch Vorschreibung einer Wartefrist zu ermöglichen, innerhalb welcher im Ablebensfall entweder überhaupt keine Auszahlung stattfindet oder nur die eingezahlten Prämien ohne oder mit Zinsen zurückerstattet werden. Es werden die in allen diesen Fällen in Frage kommenden Formeln zur Bestimmung der Dauer dieser Wartefrist angegeben.

Robert Frucht (Trieste).

Haafte, M. van: L'assurance d'un capital de survie établie en partant de celle d'une rente de survie. Verzekeerings-Arch. 17, (41)—(44) (1936).

Verf. gibt eine neue Herleitung der Formel für die Einmalprämie der (abgekürzten oder lebenslänglichen) Versicherung eines Überlebenskapitals, indem er diese auf die Versicherung von Überlebensrenten zurückführt.

Robert Frucht (Trieste).

Ogborn, M. E.: The official universal notation adopted by the second international actuarial congress, 1898. J. Inst. Actuar. 67, 103—134 (1936).

Gastineau-Hills, M. H.: The official universal notation adopted by the second international actuarial congress, 1898. J. Inst. Actuar. 67, 135—186 (1936).

Marchés, H. J.: Nomographische Kursbestimmung von auf einmal ablösbaren Anleihen. Verzekeerings-Arch. 17, (97)—(107) (1936) [Holländisch].

Geometrie.

Kritikos, N.: Der Jordansche Satz über ebene geschlossene Kurven. Bull. Soc. Math. Grèce 17, 1—25 (1936) [Griechisch].

Es wird der Jordansche Kurvensatz bewiesen; folgende Punkte der Beweis-anordnung sind bemerkenswert: Es wird ein kartesisches Koordinatensystem fixiert,

und als Hilfspolygone werden nur solche mit achsenparallelen Seiten benutzt. Der Spezialfall, wo die Kurve eine achsenparallele Strecke enthält, kann dann relativ leicht erledigt und der allgemeine Fall auf diesen zurückgeführt werden. *Busemann.*

Gutz, Al.: Sur un théorème de géométrie plane élémentaire. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 6, 159—161 (1936).

Verf. gewinnt eine hinreichende Bedingung dafür, daß von zwei Polygonzügen mit denselben Endpunkten der eine kürzer ist als der andere, indem er einen bekannten Beweis für den Satz analysiert, daß von zwei konvexen Polygonzügen, die auf derselben Seite ihrer gemeinsamen Sehne liegen, der innere kürzer ist. *W. Fenchel.*

Simioneseo, G. D.: Sur les triangles trihomologiques et triorthologiques. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 6, 191—198 (1936).

I. Si le triangle ABC est homologique à la fois avec $A'B'C'$ et $B'C'A'$ les intersections $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$ et $(AB, A'B')$ sont collinéaires, tandis que $(BC, C'A')$ etc. sont aussi collinéaires. Les cubiques formées par les côtés des triangles ABC et $A'B'C'$ ayant 6 points communs, situés sur 2 droites, les 3 autres sont aussi en ligne droite. Par conséquent deux triangles bihomologiques sont trihomologiques. Après avoir donné cette démonstration d'un théorème connu, l'auteur trouve une condition analytique pour que deux triangles soient trihomologiques. — II. Le triangle ABC est orthologique avec $A'B'C'$, si les perpendiculaires issus de A , B et C sur BC , CA et AB concourent en O . Théorème: Si ABC est orthologique avec $A'B'C'$ et avec $B'C'A'$, O est situé sur l'ellipse de Steiner de ABC et les triangles sont triorthologiques. — III. Il existe des triangles, qui sont simultanément trihomologiques et triorthologiques.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Julia, Gaston: Sur un problème de géométrie des nombres posé par la construction de certaines surfaces de Riemann. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 229—233 (1936).

Auf einem Kreise C der ganzzahligen Länge k seien in linearer Anordnung p Bögen $\widehat{a_n b_n}$ gegeben mit paarweise verschiedenen Endpunkten und Längen resp. $< k_n$, wobei k_n ganze Zahlen mit $k_1 + \dots + k_p = k - 1$ sind. Es wird verlangt, daß jedem Bogen $\widehat{a_n b_n}$ ein oder mehrere (paarweise fremde) Bögen zugeordnet werden, deren Gesamtlänge k_n ist; die Endpunkte des einen von ihnen sollen auf $\widehat{b_{k-1} a_k}$ und $\widehat{a_k b_{k+1}}$ liegen, die übrigen echte Teilmengen der (offenen) Komplementärmenge von $\widehat{a_1 b_1} + \dots + \widehat{a_p b_p}$ sein, die Entfernungen von zwei aufeinanderfolgenden unter ihnen muß ganzzahlig sein. — Dieses Problem wird schrittweise gelöst, wobei die Lösung nicht eindeutig ist.

W. Feller (Stockholm).

Stratton, W. T.: A study of general polar tangent curves. Amer. Math. Monthly 43, 398—409 (1936).

Bückner, Hans: Über Flächen von fester Breite. Jber. Deutsch. Math.-Vereinigung 46, 96—139 (1936).

Einleitend werden die wichtigsten der bekannten Eigenschaften der Figuren konstanter Breite sowie ihre Charakterisierung als vollständige Mengen im Sinne von Meissner z. T. mit neuen Beweisen zusammengestellt. Hierfür wie für das Folgende erweist sich der Begriff der abgerundeten Menge vom Index d als nützlich. Darunter wird eine Menge verstanden, deren Durchmesser $\leq 2d$ ist und die mit je zwei Punkten jeden diese verbindenden Kreisbogen vom Radius d enthält, der nicht größer als ein Halbkreis ist. (Es sind das die überkonvexen Mengen im Sinne von Mayer; dies. Zbl. 10, 270. Ref.) Damit ein ebener konvexer Bogen bzw. ein konvexes Flächenstück zu einer Kurve bzw. Fläche konstanter Breite d ergänzt werden kann, ist notwendig und unter naheliegenden zusätzlichen Voraussetzungen auch hinreichend, daß sie dem Rand einer ebenen bzw. räumlichen abgerundeten Menge vom Index d angehören. Ferner wird der Satz von Pál, daß jede Menge vom Durchmesser d Teilmenge einer vollständigen Menge desselben Durchmessers ist, auf einem neuen Wege

bewiesen, der den Vorteil besitzt, daß er durch endlich viele in ihrer Wirkung leicht übersehbare Abrundungskonstruktionen von der gegebenen Menge zu einer vollständigen Hülle führt. Als Hauptresultat der Arbeit ist folgendes anzusehen. In der Ebene gibt es bekanntlich eine Klasse besonders einfacher Kurven konstanter Breite d , die Reuleaux-Polygone, die sich aus Kreisbögen vom Radius d zusammensetzen. Nach Blaschke kann jede Kurve konstanter Breite durch Reuleaux-Polygone approximiert werden. Dagegen gibt es keine Flächen konstanter Breite, die nur aus Kugelstücken bestehen. Verf. grenzt nun eine Klasse von Körpern ab, die als Analoga der Reuleaux-Polygone anzusehen sind. Es sind die Körper konstanter Breite d , die erhalten werden können als Durchschnitt aller Kugeln vom Radius d , deren Mittelpunkte zu einer aus endlich vielen Punkten und Kreisbögen bestehenden Menge gehören. Die Begrenzung eines solchen „elementaren“ Körpers konstanter Breite d besteht aus Kugelstücken vom Radius d und aus Spindelzweiecken, die durch Rotation eines Kreisbogens vom Radius d um seine Sehne entstehen. Jedes Polyeder von einem Durchmesser $< d$ ist in einem elementaren Körper der Breite d enthalten. Hieraus ergibt sich dann das Analogon des Satzes von Blaschke: Jeder Körper konstanter Breite läßt sich durch elementare Körper konstanter Breite approximieren. W. Fenchel.

Bose, R. C.: A theorem on the non-Euclidean triangle. Bull. Calcutta Math. Soc. 27, 69—72 (1935).

En désignant par $\Phi(x, y)$ la valeur de l'angle C du tétragone $AOBC$, où $OA = x$, $OB = y$ et $\angle A, \angle O$ et $\angle B$ sont des angles droits, l'auteur démontre que pour chaque triangle il existe une équation suivante entre les côtes a, b, c et les altitudes réciproques p, q, r :

$$\Phi(a, p) = \Phi(b, q) = \Phi(c, r).$$

L'auteur donne d'abord la démonstration pour le cas de géométrie elliptique, ensuite pour celui de la géométrie hyperbolique. Dans ce dernier cas la démonstration est fondée sur les propriétés des hexagones orthogonaux du plan hyperbolique. Ensuite l'auteur montre que pour les trois géométries classiques les méridiennes du triangle se rencontrent en un même point.

Nil Glagoleff (Moskau).

Heffter, Lothar: Abbildung des hyperbolischen und des elliptischen Raumes im Euklidischen Raum. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1936, 1—12 (Abh. 6).

L'auteur donne une certaine modification du modèle de Klein représentant les espaces hyperbolique et elliptique dans l'espace euclidien. Selon Klein l'espace hyperbolique peut être représenté dans l'espace euclidien par les points intérieurs d'une sphère au rayon égal à un, ayant le centre à l'origine. — L'auteur transforme le radius-vecteur r de chaque point intérieur de la sphère en ϱ à l'aide de la formule: $\varrho = \text{Arth } r$. L'intérieur de la sphère s'étend surtout l'espace. Les droites de la géométrie hyperbolique sont présentées par des courbes à deux asymptotes, ressemblant à des hyperboles, et les plans — pas des surfaces de rotation ressemblant à des hyperboloïdes. On peut construire un modèle semblable pour la géométrie elliptique. — L'auteur trouve que son modèle est plus facile à se présenter dans l'espace euclidien que celui de Klein.

Nil Glagoleff (Moskau).

Kneser, Hellmuth: Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie. Deutsche Math. 1, 337—340 (1936).

L'auteur donne une démonstration nouvelle de la formule de Schläfli, qui sert à exprimer la différentielle du volume d'un simplexe arbitraire donné sur une sphère à n dimensions au moyen du volume d'un simplexe frontière à $n - 2$ dimensions et des différentielles des arêtes. L'auteur emploie la méthode du calcul intégral; sa démonstration diffère de celle de Schläfli par plus de simplicité. Plus loin l'auteur indique la possibilité d'appliquer cette méthode de démonstration à la géométrie hyperbolique; il fait mention sur la valeur possible de telles recherches pour la théorie des fonctions.

Nil Glagoleff (Moskau).

Graf, Ulrich: Über eine Darstellung der kosmologischen Struktur mit zeitlich veränderlicher Raumkrümmung in der Laguerreschen Kugelgeometrie. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 46, Abt. 1, 20—26 (1936).

Der Verf. gibt eine Abbildung der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit auf den Laguerreschen Kugelraum an. Er erhält diese Abbildung, indem er die homogenen Ebenenkoordinaten x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 , die der Gleichung $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ genügen, mit homogenen Punktkoordinaten X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit durch die Formeln $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = K X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4$ verbindet. Bei dieser Abbildung hat ein Raum $\sum_{i=0}^4 a_i X_i = 0$ zum Bilde eine Sphäre

(das ist orientierte Kugel); eine Ebene als Träger eines Raumbüschels — eine lineare Sphärenreihe; eine Gerade als Träger eines Raumbündels, eine lineare Sphärenkongruenz; ein Punkt als Träger eines Raumbüschels (= Raumbündels) — einen linearen Sphärenkomplex. Der Verf. zeigt, daß die Gruppe der ∞^{11} Ähnlichkeitstransformationen der pseudoeuklidischen bzw. euklidischen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit der erweiterten Laguerreschen Gruppe L^{11} des Kugelraumes isomorph ist. Mit Hilfe dieser Abbildung erhält der Verf. den Modellraum für die Zylinderwelt von H. Weyl. — Dieser Artikel ist eine Erweiterung der früheren Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. 13, 31) und der Arbeit von H. E. Timerding (Jber. Deutsch. Math.-Verein. 1912, 274).

Nil Glagoleff (Moskau).

Weiss, E. A.: Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation. Deutsche Math. 1, 447—459 (1936).

Algebraische Geometrie:

Mordoukhay-Boltovskiy, D.: Sur les arcs de courbes algébriques. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 2, 53—70 u. franz. Zusammenfassung 70 (1936) [Ukrainisch].

Semple, J. G.: On multiple curves and surfaces as limits. Proc. Cambridge Philos. Soc. 32, 373—377 (1936).

Es fragt sich, welches die Grenzform der Enveloppe einer algebraischen Kurve ist, wenn diese sich auf einer gegebenen Fläche F bewegt und auf eine gegebene r -mal gezählte Kurve reduziert. Man setzt voraus, daß die bewegliche Kurve ∞^1 Lagen annimmt, die einem Linearsystem $|K|$ angehören; ihre Gleichung wird symbolisch folgendermaßen ausgedrückt:

$$K(\lambda) \equiv C^r + \lambda C^{r-1} S^{(1)} + \lambda^2 C^{r-2} S^{(2)} + \dots + \lambda^r S^{(r)} + \lambda^{r-1} R(\lambda) = 0;$$

hier bedeuten: λ ein Parameter, wovon die bewegliche Kurve abhängt; C^r, C^{r-1}, \dots die Grenzkurve C r -mal, $(r-1)$ -mal, \dots gezählt; $S^{(i)}$ eine feste Kurve des Systems $|iC|$; $R(\lambda)$ eine bewegliche Kurve von $|K|$, deren Parameter für $\lambda = 0$ endlich sind. Diese Gleichung gestattet leicht, die bewegliche Kurve in der Nähe ihrer Grenzlage zu untersuchen; so findet man, daß die gesuchte Grenzenveloppe aus der r -mal gezählten Enveloppe von C und aus den $r(r-1) \gamma$ Strahlbüscheln der Tangenten von F in ebenso vielen Punkten von C besteht (hier bedeutet γ den Grad von $|C|$). Ganz ähnlich kann man den Fall behandeln, wo die Grenzkurve aus verschiedenen Teilen $C_1 C_2 \dots C_\sigma$ mit gegebenen Multiplizitäten $r_1 r_2 \dots r_\sigma$ besteht; hier kommen noch die Strahlbüschel der Tangenten von F in den Schnittpunkten $C_i C_j$ (mit den Multiplizitäten $2r_i r_j$) in Betracht. Mit derselben analytischen Methode wird auch die Grenzenveloppe einer algebraischen Fläche bestimmt, die sich auf einer V_3 bewegt und auf eine einzige gegebene r -mal gezählte Fläche reduziert.

E. G. Togliatti (Genova).

Campedelli, L.: Un'osservazione sui plurigeneri delle superficie ellittiche di genere $p_g = 0$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 548—552 (1936).

En partant d'une formule due à F. Enriques [Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero. Rend. Circ. mat. Palermo 20 (1905)] et qui donne les plurigenres P_m d'une surface elliptique F , Campedelli établit les propositions suivantes:

Si n désigne le déterminant de F et π le genre (≥ 1) des courbes K constituant le faisceau elliptique de F , on a $P_n = 2\pi - 1$ et, dans le cas $\pi > 1$, $P_m < P_n$ pour $m < n$.
P. Dubreil (Nancy).

Baker, H. F.: Note on hyperelliptic surfaces and certain Kummer surfaces. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 342—354 (1936).

In der bekannten Behandlung von F. Enriques und F. Severi (s. G. Castelnuovo und F. Enriques, Enzykl. d. math. Wiss., III C 6 b, n° 40) erscheinen die hyperelliptischen Flächen eines Ranges $r > 1$ als Bilder von Involutionen auf einer Jacobischen Fläche. Einem umgekehrten Wege folgend nimmt Verf. eine hyperelliptische Kurve des Geschlechts 2 als Ausgangspunkt an; als Anwendung des Jacobischen Umkehrproblems bestimmt er zunächst die entsprechende Jacobische Fläche F ; dann erkennt er, daß F gewisse Involutionen enthält, deren Bilder hyperelliptische Flächen liefern. Er behandelt folgende zwei Kurven: $\eta^2 = 6\xi(\xi^4 + 1)$, $\eta^2 = \xi^6 + 2c\xi^3 + 1$; die Rechnungen, die zu den entsprechenden Kummerschen und Jacobischen Flächen führen, sind in einem Buche des Verf. enthalten (Multiply-periodic Functions, Cambridge 1907, Chap. II, III). Im 1. Falle wird auf F eine Involution 8. Grades konstruiert; sie gehört einer Gruppe von 8 birationalen Transformationen auf F , welche von folgenden zwei Transformationen der entsprechenden hyperelliptischen Kurve erzeugt werden: 1. $\xi' = \varepsilon^2 \xi$; $\eta' = \varepsilon \eta$; 2. $\xi' = \mu^2 \xi$; $\eta' = \mu \eta$; ξ^3 ; wobei $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\mu = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Verf. bemerkt noch, daß im 1. Falle die Transformationen $\xi' = -\xi$, $\eta' = i\eta$; $\xi' = 1$; ξ , $\eta' = \eta$; ξ^3 eine rationale Involution 8. Grades auf F erzeugen. Im 2. Falle hat man auf F eine Involution 3. Grades, die von der Transformation $\xi' = \omega \xi$, $\eta' = \eta$ ($\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$) ganz ähnlich erzeugt wird. Die so gefundenen hyperelliptischen Flächen sind: die Schnittfläche von drei Quadriken eines Raumes S_5 und die Schnittfläche einer Quadrik und eines kubischen Kegels in einem Raume S_4 . *E. G. Togliatti.*

Roth, Leonard: On surfaces of sectional genus six. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 355—365 (1936).

Bestimmung aller normalen singularitätenfreien Flächen F der Hyperräume, deren hyperebene Schnittkurven C das Geschlecht 6 haben (s. dies. Zbl. **6**, 416; **9**, 34). Solche Flächen werden in vier Arten eingeteilt: 1. irrationale reguläre Flächen; 2. rationale Fl.; 3. irreguläre und mit Regelflächen nicht äquivalente Fl.; 4. mit Regelflächen äquivalente Fl. Im 2. und im 4. Falle ist die Untersuchung auf der Betrachtung des zu $|C|$ adjungierten Systems $|C'|$ gestützt; man bestimmt nämlich zunächst die Charaktere von $|C'|$ und so auch die Fläche F' , die durch $|C'|$ auf F abgebildet wird; und aus der Abbildung von F' entweder auf einer Ebene (2. Fall) oder auf einer bekannten Regelfläche (4. Fall) erschließt man diejenige von F . Besondere Berücksichtigungen sind im Falle eines reduziblen oder zusammengesetzten Systems $|C'|$ notwendig. Im 1. und im 3. Falle werden direkte besondere Bemerkungen angewendet. Die Ergebnisse werden in einem Verzeichnis zusammengefaßt, das hier nicht wiedergegeben werden kann. Schließlich, als Anwendung, die Aufzählung der Flächen 8. Ordnung; diejenigen, deren hyperebenen Schnittkurven die Geschlechter 7, 8, 9 haben, werden direkt diskutiert.

E. G. Togliatti (Genova).

Enriques, F.: La proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari e le curve infinitamente vicine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **23**, 459—462 (1936).

An outline of an algebro-geometric proof of the completeness of the characteristic series of a complete continuous system of curves on an algebraic surface. A detailed proof will be published in the "Rendiconti del Seminario Matematico" of the University of Rome.

O. Zariski (Baltimore).

Severi, Francesco: The series of sets of points on an algebraic surface. Proc. Imp. Acad. Jap. **12**, Suppl., 1—7 (1936).

Ohne Angabe der vollständigen Beweise werden drei Sätze formuliert über die Dimension der maximalen algebraischen Scharen von Punktgruppen, welche eine gegebene Punktgruppe oder ∞^1 gegebene Punktgruppen enthalten und welche a) lineare

Zirkulation Null oder b) algebraische Zirkulation haben oder c) Pseudoäquivalenzscharen sind. Die Formeln für die Dimensionen dieser vollständigen Scharen sind dem Riemann-Rochschen Satz analog und heißen

$$a) 2n - q + i, \quad b) 2n - p + j, \quad c) 2n - p - q + i + j,$$

wobei n die Ordnung der Punktgruppen, p das geometrische Geschlecht und q die Irregularität der Fläche bedeutet, während i und j , der erste und zweite Spezialitätsindex, mit Hilfe der Severischen Schar bzw. der kanonischen Kurvenschar definiert werden.

van der Waerden (Leipzig).

Burniat, Pol: Sur une variété à trois dimensions associée à un tétraèdre. Bull. Sci. math., II. s. 60, 171—180 (1936).

Construction d'une variété V_3 à trois dimensions de S_7 , équivalente à un espace S_3 double possédant un tétraèdre de plans de diramation. Étude de V_3 , de ses sections par les hypersurfaces de S_7 , en particulier par les hyperplans, les hyperquadriques et les hypersurfaces cubiques, ce qui conduit à quelques modèles projectifs de surfaces de genre un et de surfaces canoniques.

P. Dubreil (Nancy).

Pomey, Léon: Propriétés harmoniques générales des involutions unicursales d'ordre n . C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1894—1896 (1936).

L'Auteur généralise la définition des centres harmoniques en introduisant les groupes harmoniques d'ordre quelconque. Au moyen d'un théorème qui lui permet de définir géométriquement les harmoniques à l'aide d'une involution, il obtient des propriétés qui comprennent notamment une „loi générale de réciprocité“.

Dubreil.

Turri, Tullio: I gruppi lineari di omografia razionali, i quali non lasciano fisso alcuno spazio razionale. Rend. Circ. mat. Palermo 49, 307—335 (1935).

The main result gives a descriptive classification of the linear groups of linear transformations with rational coefficients (rational collineations) which do not leave invariant any rational linear space (irreducible groups). These divide into two classes. A group U of the first class consists of all those rational collineations which leave invariant the fundamental spaces of a given rational collineation β whose minimal equation is irreducible. A group Z of the second class is the intersection of two groups U and U' of the first class satisfying the following conditions: the fundamental spaces of the collineation β relative to U are conjugate complex, $S_{2p-1}^{(j)}$ and $\bar{S}_{2p-1}^{(j)}$; $U' = \alpha^{-1}U\alpha$, where α is a rational collineation such that the space $E_{2p-1}^{(j)} = \alpha S_{2p-1}^{(j)}$ is contained in the joining space of $S_{2p-1}^{(j)}$ and $\bar{S}_{2p-1}^{(j)}$ and such that there are no real lines incident with the spaces $S_{2p-1}^{(j)}$, $\bar{S}_{2p-1}^{(j)}$ and $E_{2p-1}^{(j)}$. These three spaces determine, for each j , a variety of Segre, of indices $(2p-1, 1)$, and the group Z is characterized by the property of leaving invariant the $(2p-1)$ -spaces of each of these varieties. In the proofs use is made of the corresponding results in the case of real collineations due to Cartan. From the algebraic connections of the question it is clear the result must contain in a geometric form some general statement on the division algebras over the field of rational numbers.

O. Zariski (Baltimore).

Waerden, B. L. van der: Zur algebraischen Geometrie. VIII. Der Grad der Grassmannschen Mannigfaltigkeit der linearen Räume S_m in S_n . Math. Ann. 113, 199—205 (1936).

Détermination du degré g de la variété de Grassmann G des S_m dans S_n , et des degrés d'une série de variétés contenues dans G . Ces degrés ont été calculés autrefois par Schubert [Acta math. 8, 97 (1886)]. B. L. van der Waerden utilise une formule symbolique de Schubert qu'il démontre, dans le § 2 du présent travail, en appliquant le "principe de la conservation du nombre"; mais il complète le raisonnement en montrant, comme l'exige la rigueur, qu'on doit attribuer la multiplicité 1 à chaque portion irréductible de la variété décomposée qui intervient dans la spécialisation envisagée. Pour établir ce point, il suffit de considérer les espaces tangents

(cf. B. L. van der Waerden, *Zur algebraischen Geometrie*, V; *Math. Ann.* **110**, 128; *ce Zbl.* **9**, 225). Un dernier paragraphe concerne une signification géométrique du degré g calculé.
P. Dubreil (Nancy).

Differentialgeometrie:

Sasaki, Shigeo: Einige charakteristische Eigenschaften derjenigen ebenen Kurven, deren Affin- und Projektivnormalen übereinstimmen. *Proc. Imp. Acad. Jap.* **11**, 403 bis 404 (1935).

Verf. beweist den Satz: Fallen in jedem Punkt einer ebenen Kurve C die affine und die projektive Normale zusammen, so ist die Affinkrümmung von C eine lineare Funktion der Affinbogenlänge.
Haack (Berlin-Charlottenburg).

Boos, Pierre: Propriétés caractéristiques de courbes ou de surfaces. II. Surfaces. *Ann. École norm.*, III. s. **53**, 183—222 (1936).

Dans la deuxième partie (I. v. *ce Zbl.* **14**, 132) l'auteur étudie des surfaces convexes S . Si O est un point de S et t le plan tangent en O , on mène par O un plan sécant p dont la position est déterminé par l'angle α entre une tangente fixe de S et la trace de p sur t et par la tangente λ de l'angle entre p et t . Soit v le volume compris entre p et la calotte. S possède en O la propriété (R) si, p variant, v ne dépend que de λ — la propriété (R') si v dépend du produit de λ par une fonction de α —, (R'') si v ne dépend que de la distance de O au point d'intersection de l'axe de S avec le plan tangent parallèle à p . Si O est (R) , S est une surface de révolution autour de la normale en O . Si O est (R') , S est une surface de révolution affine et O est situé sur son axe (= les plans perpendiculaires à l'axe coupent S suivant des ellipses semblables dont les centres sont situés sur l'axe). Si O est (R'') , S est de révolution affine parallèlement à t (les plans sécants parallèles à t ne sont pas perpendiculaires à l'axe); les cônes circonscrits avec les sommets sur l'axe touchent S suivant des courbes planes situées dans les plans parallèles.
S. Finikoff (Moscou).

Tzitzeica, G.: Sur quelques propriétés affines. *Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest* **6**, 8—12 (1936).

V_{n-1} sei eine $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche im n -dimensionalen euklidischen Raum. Ist K die Totalkrümmung in einem Punkt M von V_{n-1} und p der Abstand der in M berührenden Hyperebene vom Nullpunkt, so ist, wie Verf. zeigt, $\frac{K}{p^{n+1}}$ eine zentroaffine Invariante der V_{n-1} .
Haack (Berlin-Charlottenburg).

Tzitzéica, Georges: Une classe de réseaux. (*Athènes*, 2.—9. IX. 1934.) *Actes Congr. Interbalkan. Math.* 81—82 (1935).

L'auteur considère le réseau à invariants ponctuels constants différents. Il est facile de voir que les réseaux transformés de Laplace sont de la même espèce. De plus on peut trouver sur les tangentes aux lignes du réseau ∞ points qui décrivent des réseaux aux mêmes invariants constants.
S. Finikoff (Moscou).

Tzitzéica, Georges: Réseaux et congruences. (*Athènes*, 2.—9. IX. 1934.) *Actes Congr. Interbalkan. Math.* 107—113 (1935).

L'auteur donne un aperçu historique de la théorie des réseaux, des congruences et des suites de Laplace et en rappelle les cas particuliers principaux: les réseaux aux invariants égaux, les réseaux quadratiques, des congruences R et les suites de Laplace périodiques.
S. Finikoff (Moscou).

Hatzidakis, Nicolas: Quelques nouvelles formules. Sur les congruences de droites. (*Athènes*, 2.—9. IX. 1934.) *Actes Congr. Interbalkan. Math.* 83—89 (1935).

L'auteur rapporte le rayon d'une congruence K au trièdre T formé par la normale de la surface directrice S („support“) et deux tangentes aux courbes orthogonales (C) et (C') de S . En considérant une réglée R de K qui correspond à la courbe (C) il donne les formules de contorsion (= le paramètre de distribution) de R et de l'abscisse de la ligne de striction de R exprimées par les cosinus a, b, c des angles du rayon avec

les axes de T et par les rayons de courbure normale et géodésique et de la torsion géodésique de (C) . Les formules sont appliquées au cas de a, b, c constants et aux cas de la ligne (C) particulières (géodésique, asymptotique ou ligne de courbure). En remplaçant la congruence de normales de S par une congruence arbitraire K l'auteur introduit la notion des lignes de courbure de S par rapport à K (qui correspondent aux développables de K), des lignes asymptotiques (= les lignes de striction de la réglée R correspondante), des géodésiques spéciales [la normale principale de (C) coïncide avec le rayon de K] et générales [le plan osculateur de (C) contient le rayon de K].

S. Finikoff (Moscou).

Su, Buchin: On certain periodic sequences of Laplace of period four in ordinary space. *Sci. Rep. Tôhoku Univ.*, I. s. 25, 227—256 (1936).

Si deux suites de Laplace périodiques à période 4 à foyers $N_1 N_2 N_3 N_4$ possèdent les mêmes diagonales $N_1 N_3, N_2 N_4$, il existe ∞^1 suites du même espèce qui s'appuient sur les mêmes diagonales. Les diagonales engendrent donc un couple stratifiable, les congruences de chaque suite sont de Wilczynski et leurs nappes focales sont projectivement équivalentes. Deux congruences du couple $(N_1 N_3), (N_2 N_4)$ appartiennent à une même congruence linéaire [confr. la Note de l'auteur du référé C. R. Acad. Sci., Paris 189, 517 (1929)]. Inversement, si les lignes d'intersection des plans osculateurs au point commun de lignes d'un système conjugué appartiennent à une congruence linéaire, la suite de Laplace qui d'y provient est périodique à période 4 et appartient à la classe considérée.

S. Finikoff (Moscou).

Schirokow, P.: Über den Schurschen Raum. *Bull. Soc. phys.-math. Kazan*, III. s. 7, 64—76 u. deutsch. Zusammenfassung 76 (1936) [Russisch].

A Schur space of n -dimensions is a space admitting an $\frac{n(n-1)}{2}$ parameter group of rotations about a fixed point. In this paper the author considers spaces admitting an $\frac{n(n-1)}{2}$ parameter group of motions which leave invariant a family of geodesically parallel hypersurfaces. If the normal geodesics to this family meet in a regular point of the space we have a Schur space (with center); these normals are a congruence of Schur. If a space has two different congruences of Schur it is of constant curvature. If a Schur space is symmetric (in the sense of Cartan) then it is either of constant curvature or it admits a constant vector field. Finally if a Schur space admits a larger group of motions than the fundamental one of $\frac{n(n-1)}{2}$ parameters, then it is a symmetric space.

M. S. Knebelman (Princeton).

Wegener, Johannes M.: Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schaar von Extremalen. *Mh. Math. Phys.* 44, 115—130 (1936).

Calculations of the fundamental invariants for a hypersurface of a Finsler space. Applications to minimal hypersurfaces, geodesic curvature and torsion; proof of Gauss-Bonnet theorem.

M. S. Knebelman (Princeton).

Rachevsky, Pierre: Systèmes trimétriques et la métrique de Finsler généralisée. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 202, 1237—1239 (1936).

A frame consists of a point M , a line m on M and a plane μ on m ; it is therefore defined by six coordinates x^1, \dots, x^6 . The passage from one frame to a neighboring frame is defined by six differential forms, $\overset{1}{\omega}, \overset{2}{\omega}, \overset{0}{\omega}, \overset{10}{\omega}, \overset{20}{\omega}, \overset{12}{\omega}$ which have the significance (1) $\overset{12}{\omega} = \overset{10}{\omega} = 0$ if M is displaced along m (2) $\overset{12}{\omega} = \overset{20}{\omega} = 0$ if the rotation of μ is about m , (3) $\overset{12}{\omega} = 0$ if M is displaced in the plane μ . Then $\overset{1}{\omega}$ is the displacement of M under (1); $\overset{2}{\omega}$ is the angle of rotation of μ under (2) and $\overset{0}{\omega}$ is the angle of rotation of m under (1) and (2). A curve is a one-parameter system of frames such that $\overset{10}{\omega} = \overset{20}{\omega} = \overset{12}{\omega} = 0$; a surface is a three-dimensional variety satisfying $\overset{12}{\omega} = 0$. The

author then shows that in a special coordinate system $\overset{1}{\omega}$ and $\overset{2}{\omega}$ are Finsler metrics and that in the case (2) $\overset{1}{\omega} = F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, v\right) dx$ which is a generalisation of a Finsler metric in the sense that distance depends not only on a linear direction but also on a superficial one.

M. S. Knebelman (Princeton).

Cartan, Élie: La géométrie de l'intégrale $\int F(x, y, y', y'') dx$. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 42—69 (1936).

If $y = \varphi(x)$ is a curve in the XY plane, $\int F(x, y, y', y'') dx$ may be taken to represent the arc of the curve in a certain broad sense (ex. $\int y'^{\frac{1}{2}} dx$ is the arc in uni-modular affine geometry). In this paper the author considers the invariant theory attached to the function $F(x, y, y', y'')$ under the group of contact transformations (more properly speaking, under the group once extended). In certain special cases, viz. $F = e^p$ or $F = \Phi^p$ where Φ is linear in y'' it is possible to attach an affine connection to F whose components are functions of the linear element (x, y, y') ; in general the connection depends on second order elements. To obtain the fundamental differential invariants the following linear forms are introduced: $\omega = F dx + \alpha(dy' - y'' dx) + \beta(dy - y' dx)$, $\omega_1 = \lambda(dy - y' dx)$, $\omega_2 = \mu(dy' - y'' dx) + \nu(dy - y' dx)$ and ω_3 defined by $\omega' \equiv [\omega_2 \omega_3] \pmod{\omega_1}$ where $[\]$ indicates exterior product form. The imposition of the invariant conditions $\omega'_1 \equiv [\omega \omega_2] \pmod{\omega_1}$ and $\omega'_2 \equiv [\omega \omega_3] \pmod{\omega_1, \omega_2}$, $\varepsilon = \pm 1$ lead to the invariant $\kappa = \frac{F}{2 \sqrt{-\varepsilon F \frac{\partial^2 F}{\partial y''^2}}} \left(\frac{\frac{\partial^3 F}{\partial y''^3}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2}} + 3 \frac{\frac{\partial F}{\partial y''}}{F} \right)$ where

it is assumed F is not linear in y'' and ε has the sign opposite to that of $F \frac{\partial^2 F}{\partial y''^2}$.

A further calculation gives the relations A of the paper expressing the exterior derivatives of the four forms in terms of their exterior products, the coefficients being the fundamental differential invariants of F . In the second section the case $\kappa = \text{const}$ is considered; the integration of this third order differential equation (with regard to y'') leads to $F = (Ay'' + B)^p(Cy'' + D)^{1-p}$ where A, B, C, D are arbitrary functions of x, y, y' and p is a root of $(4 + \kappa^2 \varepsilon) p(1 - p) = 1$. The exceptional case is $\varepsilon = -1$ $\kappa^2 = 4$; in this case the solution is $F = (Cy'' + D) e^{\frac{Ay'' + B}{Cy'' + D}}$. Since by a contact transformation the curves $Cy'' + D = 0$ can be reduced to points, there exists a coordinate system in which $F = (Ay'' + B)^p$ in the first case and $F = e^{Ay'' + B}$ in the exceptional case. The case $\kappa^2 = +\frac{\varepsilon}{2}$ gives the two values of p to be $\frac{1}{3}$ and $\frac{2}{3}$ and either one can be reduced to the other. The third section is devoted to the calculation of the affine connection and torsion for the form $F = (Ay'' + B)^p$ where $p \neq 0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ while fourth and last does the same thing for the case $F = (Ay'' + B)^{\frac{1}{3}}$.

M. S. Knebelman (Princeton).

Ehresmann, Charles: Sur la notion d'espace complet en géométrie différentielle. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 2033—2035 (1936).

Désignons par H un espace homogène de Lie à n dimensions, par G le groupe opérant dans H et par g le sous-groupe de G qui laisse invariant un point O de H . Une variété analytique E à n dimensions s'appelle espace généralisé par rapport à H si tout point x_0 de E admet dans E un voisinage $V(x_0)$ jouissant des propriétés suivantes: 1° aux points x de $V(x_0)$ se trouve associée une famille de repères R_x ; 2° à l'ensemble de deux repères R_x et R_{x+dx} correspond une transformation infinitésimale

$$\sum_{i=1}^n e_i X_i, g \text{ étant engendré par les transformations infinitésimales telles que } e_1 = \dots = e_n = 0.$$

On suppose qu'on ait associé à tout point x de E un espace H_x isomorphe à H , le point x étant commun à E et H_x et on appelle repère R_x un isomorphisme de H sur H_x lors-

que cet isomorphisme met en correspondance les points O et x . L'au. définit alors un procédé de développement d'un arc analytique de H suivant un arc analytique de E et il appelle l'espace E normal si tout arc analytique de H peut se développer suivant un arc analytique de E ayant pour origine un point x quelconque. Enfin l'au. définit pour deux espaces généralisés la notion d'isomorphisme local et il énonce, sans démonstration, un théorème d'après lequel deux espaces généralisés normaux sont globalement isomorphes s'ils sont localement isomorphes et tous les deux simplement connexes.

O. Borůvka (Brno).

Astronomie und Astrophysik.

● **Peters, Jean:** *Hilfstafeln zur Verwandlung von Tangentialkoordinaten in Rektaszension und Deklination.* Unter Mitwirkung v. Helene Nowacki. (Veröff. d. Astron. Rechen-Inst., Berlin-Dahlem. Nr. 52.) Berlin u. Bonn: Ferd. Dümmler 1936. IV, 139 S. RM. 8.—.

Thernöe, K. A.: *Ein Diagramm zur Erleichterung der Hypothesenrechnung bei elliptischer Bahnbestimmung.* Astron. Nachr. **260**, 145—158 (1936).

Die Gaußsche Fundamentalgleichung zur Bestimmung der heliozentrischen Distanz x eines Planeten (bzw. seiner geozentrischen Distanz h) wird in die Form gebracht

$$x^2 = 1 - 2 \cos \psi \cdot h + h^2, \quad h = A_0 - B_0 \frac{1}{x^3},$$

wo $A_0, B_0, \cos \psi$ beobachtete Größen sind. Dem Wertesystem x, h , wie es durch die 2. Gleichung verknüpft ist, wird eine y, t -Ebene zugeordnet:

$$\frac{y}{t} = A_0 - B_0 \frac{1-t}{t}.$$

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kurve $\cos \psi = \text{konst.}$ gibt dann das Wertesystem y, t und damit x, h .

Klose (Berlin).

Schütte, K.: *Die Struktur der Hestia-Lücke im System der Kleinen Planeten (nebst allgemeinen Störungen für 50 und mittleren Elementen für 31 Planeten).* Astron. Nachr. **260**, 177—224 (1936).

Die Arbeit soll ein Beitrag zur allgemeinen Theorie der Hestiaplaneten (Periode nahe $\frac{1}{3}$ der Jupiterperiode) sein. Um von den Zufälligkeiten der in den Planetenverzeichnissen veröffentlichten Bahnelemente frei zu werden, wurden für die in Betracht kommenden Planeten sog. „mittlere Elemente“ im Sinne der Brendelschen Störungstheorie und die langperiodischen und fortschreitenden Störungen dieser Elemente berechnet. Die Darstellung der verbesserten Elemente durch die Beobachtungen wurde gegeben. Mit diesem homogenisierten Material wurde die Hestialücke statistisch untersucht. Die Struktur der Lücke ist (wie zu erwarten) nur unwesentlich geändert. Auf die genaue Kommensurabilität läßt sich, wie auch der Verf. bemerkt, die Brendelsche Theorie nicht anwenden.

Klose (Berlin).

Schütte, K.: *Vereinfachte Formeln der Differentialquotienten bei genäherter elliptischer Bahnverbesserung nach Brendel.* Astron. Nachr. **260**, 273—278 (1936).

Die Brendelschen Formeln zur differentiellen Bahnverbesserung (Mitt. Univ. Sternw. Frankfurt 1. Stück, Heft 1) werden auf den Näherungsgrad gebracht, der bei den Rechnungen des Astronomischen Recheninstituts Berlin allgemein angestrebt wird. Die Störungen der Neigungsvariablen werden ganz beiseite gelassen, im übrigen wird vorausgesetzt, daß die Beobachtungen in der Opposition erfolgten. Zur weiteren Erleichterung der Rechnung wurden Tafeln und Diagramme angefertigt, die aber nicht mit veröffentlicht worden sind.

Klose (Berlin).

Rasmusen, H. Q.: *Hilfstafeln für die numerische Integration der rechtwinkligen Koordinaten eines Himmelskörpers.* Astron. Nachr. **260**, 325—376 (1936).

Rakowiecki, Tadeusz: Deux méthodes pour la détermination de l'orbite réelle du satellite de l'étoile double visuelle à l'aide des positions opposées. *Wiadom. mat.* 42, 85—119 (1937).

Verf. gibt zwei Methoden zur Berechnung einer Doppelsternbahn. Bei der ersten verwendet er 3 Paare von diametral gegenüberliegenden Örttern. Er bestimmt zunächst (wie bei der Methode von Kowalski) die geometrischen Elemente ohne Benutzung der Zwischenzeiten und dann erst die mechanischen. Bei der zweiten Methode verwendet er 2 Paare von diametral gegenüberliegenden Örttern und bestimmt (unter Mitbenutzung der Zwischenzeiten) mit Hilfe einer leicht lösbaren transzendenten Gleichung zunächst die mechanischen und dann die geometrischen Elemente. Zu beiden Methoden gibt er je ein numerisches Beispiel. *G. Schrutka (Wien).*

Kreiken, E. A.: On the fission-theory of the eclipsing variables. *Z. Astrophys.* 11, 323—336 (1936).

Verf. hat in einigen früheren Arbeiten [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 91, 756 (1931), dies. Zbl. 2, 240; *Z. Astrophys.* 9, 212 (1934); 10, 199 (1935)] für die Periode P der Axialrotation eines Sternes die Beziehung

$$\log P = -\frac{1}{2} \log \varrho + C$$

abgeleitet, wo ϱ die mittlere Dichte und C eine Konstante vorstellt. Diese Periode und die Umlaufperiode einer Bedeckungsveränderlichen sind abhängig von dem Werte $\log \varrho$, den man für die Komponente mit der kleinsten Dichte erhält. Das betrachtet der Verf. als Grund dafür, daß spektroskopische Doppelsterne und Bedeckungsveränderliche als eine Klasse genommen eine kleinere Axialrotation als einfache Sterne besitzen. Seine Ausführungen stützt der Verf. auf das Beobachtungsmaterial von Miß Westgate. Für die Beziehung zwischen der Periode der Algolveränderlichen und der Dichte der Komponente mit der kleineren Dichte findet Verf. nach einer eingehenden theoretischen Analyse

$$\log P = -\frac{1}{2} \log \varrho - 0,645 - 1\frac{1}{2} \log \frac{R_1 + R_2}{R} - 0,190 |\Delta \log \varrho| \pm 0,070 \text{ (W. F.)},$$

wo R_1, R_2 die Halbmesser der beiden Komponenten, R ihre gegenseitige Entfernung und $0,190 |\Delta \log \varrho|$ ein Korrektionsglied vorstellt. *Hubert Slouka (Prag).*

Araki, Toshima, und Michinori Kurihara: Über den inneren Aufbau der Weißen Zwerge. *Mem. Coll. Sci. Kyoto A* 18, 137—153 (1935).

Die Verff. besprechen die Erscheinung der weißen Zwerge und geben eine Übersicht der Eddingtonschen Theorie, wobei die neuen Untersuchungen von R. H. Fowler berücksichtigt werden, die sich auf die Fermische und Diracsche Theorie des entarteten Gases stützen. Araki hat unlängst [*Z. Astrophys.* 8, 358 (1934); dies. Zbl. 9, 415] eine neue Theorie des inneren Aufbaues der weißen Zwerge unter Annahme einer Beziehung zwischen Dichte und der Energieerzeugung entwickelt, wobei aber nur das nichtrelativistisch entartete Gas berücksichtigt wurde. In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie verallgemeinert, indem sie auch auf den Fall der relativistischen Entartung angewendet wird. Weiter werden numerische Berechnungen für nichtrelativistische weiße Zwerge durchgeführt, wobei die Emdensche polytrope Gleichung mit dem Index $n = 1, 0,5$ und 0 benutzt wird. Zum Schluß versuchen die Verff. die Einführung des Begriffes „negative Energiequelle“, den sie genötigt sind zu benutzen, zu erklären und zu rechtfertigen. *Hubert Slouka (Prag).*

Lambrech, H., und B. Jung: Die Atmosphäre der Fixsterne. *Naturwiss.* 24, 577 bis 582 (1936).

Brill, Alfred: Eine rechnerisch bequeme Methode zur Lösung der Integralgleichung der Stellarstatistik. *Z. Astrophys.* 12, 128—139 (1936).

Die klassische Integralgleichung der Stellarstatistik mit ortsunabhängiger Verteilung der absoluten Helligkeiten und ohne Absorption hat durch Schwarzschild ihre theoretische Lösung mittels Fourierintegralen gefunden. Sie wird hier approxi-

mativ als Summengleichung geschrieben und durch Einführung gewisser Hilfsgrößen, der isoplenen Helligkeiten, in einer rechnerisch bequemerer Weise behandelt.

E. Hopf (Leipzig).

Quantentheorie.

● **Jordan, Pascual: Anschauliche Quantentheorie. Eine Einführung in die moderne Auffassung der Quantenerscheinungen.** Berlin: Julius Springer 1936. XII, 320 S. RM. 12.—.

Nach einem einleitenden Kapitel über die elementaren experimentellen und theoretischen Grundlagen der Quantentheorie wird die korrespondenzmäßige Analyse der Atomerscheinungen dargestellt. Dann folgt die strengere quantenmechanische Formulierung der Komplementaritätsgedanken und danach die relativistischen Quantenprobleme, die Mehrkörperprobleme und die Kernstruktur, in welchem Zusammenhang u. a. die Jordan-Kronische Neutrinotheorie des Lichts behandelt wird. Kennzeichnend für die ganze Darstellung ist die ausführliche Berücksichtigung der Bohrschen Gesichtspunkte der Korrespondenz und Komplementarität, deren allgemeine Konsequenzen im Schlußkapitel geschildert werden — teilweise jedoch in etwas anderer Richtung, als es Bohr getan hat.

O. Klein (Stockholm).

Freeman, Ira M.: Weltkonstanten und atomistische Größen. Naturwiss. 24, 557 (1936).

Broglie, Louis de: La théorie du photon et la mécanique ondulatoire relativiste des systèmes. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 473—477 (1936).

Betrachtungen zur de Broglieschen Theorie des Lichtquants, nach welcher dieses den Schwerpunkt eines Paares von Neutrinos darstellt und demgemäß eine Wellenfunktion mit 16 Komponenten besitzt.

P. Jordan (Rostock).

Weiss, P.: On the quantization of a theory arising from a variational principle for multiple integrals with application to Born's electrodynamics. Proc. Roy. Soc. London A 156, 192—220 (1936).

Die Arbeit gibt eine Vertiefung der korrespondenzmäßigen Begründung für die Quantelung von Problemen der Kontinuumsdynamik. Es wird — zunächst rein klassisch — die Definition kanonisch konjugierter Variablen für Variationsprobleme mit mehrfachem Integral in einer erweiterten Form durchgeführt; gegenüber der bisherigen Darstellungsweise ist die hier gegebene zwar eher komplizierter als einfacher, bietet aber grundsätzliche Vorzüge hinsichtlich der relativistisch-symmetrischen Behandlung von Raum und Zeit. Diese Definition kanonisch konjugierter Variablen wird dann in üblicher Weise zur Quantelung (Vertauschungsregeln!) benutzt. Dabei kann sich natürlich im Endresultat nichts Neues gegenüber der bisherigen, primitiver begründeten Feldquantelung ergeben. Jedoch ergeben sich interessante Anwendungen auf die Elektrodynamik (sowohl Bornsche als Maxwellsche), die bekanntlich (wegen der Eichinvarianz) nicht ohne weiteres nach dem allgemeinen Schema der Feldquantelung zu quanteln ist.

P. Jordan (Rostock).

Motz, Lloyd, and M. E. Rose: On space quantization in time varying magnetic fields. Physic. Rev., II. s. 50, 348—355 (1936).

Nachdem frühere Untersuchungen (Güttinger, Majorana) Klarheit geschaffen haben über die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Zuständen gleichen Gesamtdrehmoments bei der räumlichen Quantelung in einem rasch veränderlichen äußeren Feld, wird nunmehr der Effekt einer partiellen Entkoppelung der Komponenten des Gesamtimpulses betrachtet, welcher dazu führt, daß auch zwischen Zuständen verschiedenen Gesamtimpulses (Hyperfeinstrukturkomponenten) Übergänge vorkommen. Genauer untersucht werden a) für den Güttingerschen Typ eines variablen Feldes der Fall $I = J = \frac{1}{2}$, b) für das Majoranasche Feld die Fälle I beliebig, $J = \frac{1}{2}$; $I = \frac{1}{2}$ und J beliebig; I und J beliebig. Aus der Anwendung z. B. auf das Stickstoffatom

ist eine neue Methode zur indirekten Bestimmung der nicht direkt meßbaren Hyperfeinstrukturaufspaltungen zu erhoffen. P. Jordan (Rostock).

Iwanenko, D., und A. Sokolow: Zur Wechselwirkung der schweren Teilchen. Z. Physik **102**, 119—131 (1936).

Im Sinne der Fermischen Theorie (bzw. ihrer Erweiterung nach Uhlenbeck-Konopinski) wird die Wechselwirkungsenergie zwischen einem schweren Teilchen und dem Elektron-Neutrino-Feld angesetzt in der Form

$$V = g_F \cdot \left(\frac{\hbar}{mc^2} \right)^{k+l} \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} \frac{\partial^l \psi}{\partial t^l};$$

dabei ist g_F die Fermikonstante, und φ, ψ sind die Wellenamplituden von Elektron und Neutrino. Wie von Tamm und von Iwanenko früher bemerkt, ergibt sich aus V zwangsläufig ein bestimmter Ausdruck für die Wechselwirkung Proton-Neutron, und zwar lautet dieser Ausdruck:

$$W = (-1)^{k+l+1} \frac{g_F^2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^{2(k+l)} (2k+2l+2)!}{\pi^3 c \hbar (2r)^{2k+2l+5}};$$

r der Abstand der beiden schweren Teilchen. Richtige Größenordnung von W für $r \approx 10^{-13}$ cm bekommt man für $k+l=3$, also

$$W = \frac{8! g_F^2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^6}{2^{11} \pi^3 c \hbar} \cdot r^{-11}.$$

Die Mitberücksichtigung der (hier zunächst fortgelassenen) Spinwirkungen ergibt einen zusätzlichen Faktor von ähnlicher Gestalt wie in der bekannten Breitschen Formel für die elektromagnetische Spin-Wechselwirkung. P. Jordan (Rostock).

Kopfermann, Hans: Hyperfeinstruktur und Isotopie. Naturwiss. **24**, 561—567 (1936).

Bloch, F.: On the continuous γ -radiation accompanying the β -decay. Physic. Rev., II. s. **50**, 272—278 (1936).

Nach der Fermischen Theorie (dies. Zbl. **8**, 282) wird der β -Zerfall aufgefaßt als ein Übergang von einem Neutron in ein Proton unter Emission eines Elektrons und eines Neutrinos. Verf. berechnet nun die Intensität der bei diesem Prozeß in zweiter Näherung auftretenden elektromagnetischen Strahlung. Die erste Näherung entspricht der Emission eines Elektrons in einem Zwischenzustand, in zweiter Näherung geht das Elektron unter Ausstrahlung eines Lichtquanten in den Endzustand über. Bei der Rechnung wird der Einfluß des Kernfeldes auf das Elektron vernachlässigt; das Elektron wird also durch ebene Wellen beschrieben. Die im Mittel pro Zerfallsprozeß emittierte Energie wächst mit wachsender Gesamtenergie, bleibt aber in praktisch vorkommenden Fällen unterhalb 1%. Casimir (Leiden).

Wick, G. C.: Sull'annichilazione degli elettroni positivi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **23**, 352—357 (1936).

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß ein positives Elektron, das von einem Kern emittiert wird, in der zu diesem Kern gehörigen Elektronenschale und unter dem Einfluß der Coulombschen Kraft dieses Kerns zerstrahlt. Die Wahrscheinlichkeit ist vernachlässigbar klein für normale Positronenenergien, nimmt aber mit abnehmender Energie sehr stark zu. R. Peierls (Cambridge).

Mamasachlisov, V.: Resonanzabsorption langsamer Neutronen durch Kerne. Ž. eksper. teoret. Fis. **6**, 633—646 u. deutsch. Zusammenfassung 646 (1936) [Russisch].

Wenn man annimmt, daß zwischen einem Neutron und einem Kern außer den kurzreichweitigen Anziehungskräften (durch die das Neutron an den Kern gebunden werden kann) noch schwache Abstoßungskräfte über größere Distanzen vorhanden sind, so kann man sowohl die Schärfe der Resonanzniveaus sowie die Tatsache erklären, daß in den Resonanzniveaus zwar eine große Wahrscheinlichkeit für Einfangung, dagegen praktisch keine für Streuung langsamer Neutronen vorhanden ist.

(Nach Bohr, vgl. dies. Zbl. 13, 237, können diese Tatsachen auch ohne solche Annahmen erklärt werden. Anm. des Ref.)

R. Peierls (Cambridge).

Schiff, L. I.: Statistical analysis of counter data. Physic. Rev., II. s. 50, 88—96 (1936).

Der Wirkungsgrad eines Zählers als Funktion der Teilchenhäufigkeit wird unter der Annahme berechnet, daß der Zähler nur dann anspricht, wenn das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilchen, die den Zähler treffen, eine gewisse Mindestlänge überschreitet. Das Resultat wird angewandt auf Zählungen mit einer exponentiell abklingenden Quelle. Wenn die Lebensdauer der Quelle groß gegen das Auflösungsvermögen ist, so lassen sich die wahren Teilchenzahlen aus den Angaben des Zählers auf dieselbe Weise wie bei einer konstanten Quelle ermitteln. Wird dagegen die Lebensdauer vergleichbar mit dem Auflösungsvermögen, so wird das Problem verwickelter. Dieser Fall wird gleichfalls diskutiert und Nomogramme angegeben, die zur Auswertung der Zählungen in diesem Fall verwendet werden können. *Peierls*.

Oseen, C. W.: Le problème de Newton dans la mécanique ondulatoire. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 A, Nr 18, 1—12 (1936).

Integraldarstellung der Greenschen Funktion des wellenmechanischen H-Atomproblems und elegante Lösung der Aufgabe, die zeitabhängige Wellenamplitude zu einer Zeit t zu berechnen, wenn sie zu einer anderen Zeit t_0 vorgegeben ist. *P. Jordan*.

Schaposchnikow, I.: Ein Diracsches Vektormodell für zwei nicht äquivalente Elektronen im Atom. Physik. Z. Sowjetunion 9, 618—629 (1936).

Deutsche Übersetzung der in dies. Zbl. 14, 82 referierten Arbeit. *V. Fock*.

Gurewitsch, G.: Zur Term aufspaltung des Wasserstoffatoms in hohen elektrischen Feldern. Physik. Z. Sowjetunion 9, 563—579 (1936).

Die von Lanczos gegebene Behandlung der Term aufspaltung wird vervollständigt und weiterentwickelt. Zunächst wird die in parabolischen Koordinaten separierte Schrödingergleichung nach einer von Fock [C. R. Acad. Sci. USSR 1, 244 (1934); dies. Zbl. 8, 328] gegebenen Methode durch Besselsche Funktionen angenähert gelöst. Die „Quantenbedingungen“ ergeben ein Gleichungssystem für die Energieniveaus. Dieses Gleichungssystem wird folgendermaßen gelöst: Es sei n^* die effektive Hauptquantenzahl, g das elektrische Feld in atomaren Einheiten, $k_1 = n_1 + \frac{m+1}{2}$, $k_2 = n_2 + \frac{m+1}{2}$ ($m \geq 0$, n_1 und n_2 parabolische Quantenzahlen). Dann gilt die folgende parametrische Darstellung (ξ Parameter):

$$n^* = k_2 \psi(2k_2 \xi) + k_1 \psi(-2k_1 \xi); \quad g = \frac{\xi}{8n^{*3}}.$$

Hier ist $\psi(x) = p(x)/x$, wo $p(x)$ die zu

$$x(p) = pF\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 2, p\right)$$

inverse Funktion darstellt. Für $x(p)$ ($-3 \leq p \leq 1$) werden ausführliche Tabellen mit 6—9 Dezimalstellen gegeben. Die nach dieser Methode berechnete Term aufspaltung wird für einige Wasserstofflinien mit dem Experiment verglichen, wobei eine gute Übereinstimmung gefunden wird.

V. Fock (Leningrad).

Cillié, G. G.: The theoretical capture spectrum of hydrogen. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 96, 771—779 (1936).

Aus den neuen Werten der Übergangswahrscheinlichkeit im Wasserstoffatom (Menzel und Pekeris) wird die Intensitätsverteilung der Balmerlinien bis H_{10} im Rekombinationsspektrum berechnet. Die beobachteten Unterschiede des Balmerdekrementes für verschiedene planetarische Nebel lassen sich nicht auf Unterschiede der betreffenden Elektronentemperaturen zurückführen. Die berechneten Intensitäten der Balmerlinien relativ zur Intensität des Balmerkontinuums sind etwa hundertfach zu klein, wie ein Vergleich mit den Beobachtungen von Page zeigt. Die Diskrepanz mag auf Selbstumkehr oder zu starke Schematisierung des Modells (Zanstra) zurückzuführen sein.

Wildt (Princeton).

Labocchetta, Letterio: Nuova deduzione e definizione assoluta della costante di Rydberg. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* **2**, 92—94 (1936).

Wiśniewski, Felix Joachim: Sur les effets Zeeman anormaux. *Acta Physica Polon.* **4**, 205—213 (1935).

Im Anschluß an einen früheren Versuch desselben Verf. (dies. Zbl. **4**, 379), das Quantenproblem durch eine modifizierte klassische Mechanik zusammen mit Quantenbedingungen zu behandeln, wird eine Theorie des anomalen Zeemaneffekts entwickelt.

O. Klein (Stockholm).

Jauncey, G. E. M.: Velocity distribution of atomic electrons by the method of electron impact. *Physic. Rev.*, II. s. **50**, 326—327 (1936).

Aus der gemessenen Energieverteilung von schnellen an Atomelektronen gestreuten Elektronen läßt sich, wie Verf. zeigt, die Geschwindigkeitsverteilung der Atomelektronen ableiten, wenn man auf den Stoß Energie- und Impulssatz anwendet.

Henneberg (Berlin).

Schuchowitzky, A.: A new method of solving variational problems in quantum chemistry. *Acta physicochim. (Moskva)* **4**, 803—818 (1936).

Für die Berechnung von Molekeltermen nach einem Variationsverfahren wird vorgeschlagen, in dem gegebenen Energieoperator das unangenehme Glied der Wechselwirkung zwischen den Elektronen durch eine Annäherung $\sum C_i \varphi_i$ zu ersetzen, wo die φ_i so gewählt werden, daß die auftretenden Integrale leicht ausführbar sind, und die C_i so bestimmt werden, daß die Annäherung möglichst gut wird. Das Verfahren wird am Beispiel der Wasserstoff-Molekel erläutert und das Ergebnis mit anderen Rechnungen verglichen.

F. Hund (Leipzig).

Chakravorti, S. K.: Stark-Effekt des Rotationsspektrums und elektrische Suszeptibilität bei hoher Temperatur. *Z. Physik* **102**, 102—111 (1936).

Das Verhalten einer durch einen symmetrischen Kreisel mit elektrischem Moment parallel zur Symmetrieachse idealisierten Molekel im elektrischen Feld wird mit einem von den ursprünglichen Rechnungen von Reiche [*Z. Physik* **39**, 444 (1926)] und Manneback [*Physik. Z.* **28**, 72 (1927)] etwas abweichenden Störungsverfahren [Basu, *Z. Physik* **63**, 304 (1930)] ausgerechnet. Woher ein Unterschied im Starkeffekt zweiter Ordnung rührt, wird nicht aufgeklärt.

F. Hund (Leipzig).

Share, Simon S.: The Coulomb energy of He^3 . *Physic. Rev.*, II. s. **50**, 488—489 (1936).

Bouckaert, L. P., R. Smoluchowski and E. Wigner: Theory of Brillouin zones and symmetry properties of wave functions in crystals. *Physic. Rev.*, II. s. **50**, 58—67 (1936).

Es werden Zonenstruktur und Symmetrieeigenschaften der Elektronenzustände in einem Kristall mit Hilfe der gruppentheoretischen Methode behandelt. Es kann auf diese Weise eine vollständige Übersicht über die möglichen Zonentypen bei gegebener Kristallsymmetrie erlangt werden. Insbesondere wird das energetische „Aneinanderhaften“ verschiedener Zonen diskutiert, das für solche (und nur solche) Wellenzahlvektoren auftreten kann, die invariant gegenüber einer Symmetrieeoperation des Kristalls sind. Es werden die Fälle des einfach-, flächen- und raumzentrierten kubischen Gitters näher untersucht.

Nordheim (Lafayette-Indiana).

Neugebauer, Th.: Über die Ionendeformation in binären Kristallen. *Z. Kristallogr.* **A 94**, 349—357 (1936).

Der Verf. zeigt, wie man die Deformation eines kugelsymmetrischen Ions, auf das eine Punktladung von außen wirkt, aus der Ladungsverteilung des Ions berechnen kann. Dabei werden bekanntlich Dipol-, Quadrupol- und noch höhere Momente induziert. Im Kristallgitter, wo die Deformation eine Überlagerung der Einwirkung aller um das Ion gelegenen Nachbarn ist, können sich einzelne dieser Momente ganz oder zum Teil aufheben. Diese Verhältnisse werden, soweit sie sich bereits aus der geometrischen Lage der Ionen übersehen lassen, an den wichtigsten binären Kristall-

gittertypen untersucht (Molekelgitter, NiAs-, Zinkblende-, Wurtzit-, NaCl- und CsCl-Typ). — Die Rechnungen sind für stärkere Deformationen nicht mehr streng gültig, zeigen aber bereits, daß bei Typen geringerer Symmetrie der salzartige Charakter zugunsten eines metallischen zurücktreten kann. *B. Mrowka* (Berlin).

Lonsdale, Kathleen, and K. S. Krishnan: Diamagnetic anisotropy of crystals in relation to their molecular structure. *Proc. Roy. Soc. London A* **156**, 597—613 (1936).

Das Problem ist aus der gegebenen diamagnetischen Anisotropie des Kristalls (Hauptsuszeptibilitäten $= \chi_i$ ($i = 1, 2, 3$)) und der Molekülorientierung die diamagnetischen Hauptsuszeptibilitäten K_i eines einzelnen Moleküls zu bestimmen. Das Resultat ist: 1. Triklines System: $K_i = \chi_i$ nach Größe und Richtung. 2. Monoklines System: Sind die χ_i und die Orientierung der Moleküle gegeben (z. B. durch Fourieranalyse), so sind die $|K_i|$ berechenbar. Umgekehrt ergeben für einfache aromatische Verbindungen, für die $|K_1| \approx |K_2|$ und $|K_3|$ abgeschätzt werden können, die χ_i die Gerade, in der die Molekülebene die (010)-Ebene schneidet und die Neigung von K_3 gegen die b -Achse. 3. Rhombisches System: $|K_i|$ direkt aus $\chi_{a,b,c}$ und Molekülorientierung bestimmbar. Umgekehrt kann die Richtung von K_3 berechnet werden, wenn die $\chi_{a,b,c}$ gemessen und wenn $|K_1| \approx |K_2|$ und $|K_3|$ abgeschätzt worden sind. 4. Tetragonales, trigonales und hexagonales System: $\chi_a (= \chi_b)$ und χ_c zusammen mit exakter Molekularanordnung bestimmen die $|K_i|$ nicht, außer wenn zwei Hauptsuszeptibilitäten des Moleküls gleich sind. Dann ergeben z. B. für $|K_1| \approx |K_2|$ die Messungen von χ_a und χ_c mit einer Abschätzung von $|K_1|$ und $|K_3|$ die Neigung von K_3 gegen die c -Achse, nicht aber die genaue Lage. 5. Kubisches System: $\chi_a = \chi_b = \chi_c$ ergeben nur die mittleren molekularen Suszeptibilitäten, so daß aus magnetischen Messungen nicht auf die Orientierung der Moleküle geschlossen werden kann. — Voraussetzung dieser Berechnungen ist die Annahme, daß die Zahl der verschiedenen orientierten Moleküle in der Elementarzelle gleich der maximalen Zähligkeit der Kristallklasse ist, anderenfalls Komplikationen eintreten. *W. Nowacki* (Zürich).

Landshoff, Rolf: Quantenmechanische Berechnung des Verlaufes der Gitterenergie des Na-Cl-Gitters in Abhängigkeit vom Gitterabstand. *Z. Physik* **102**, 201—228 (1936).

In der ersten Näherung der Energie des NaCl-Gitters wird der Zustand durch die antisymmetrisierte Linearkombination aus den Eigenfunktionen der einzelnen Elektronen in den ungestörten edelgasähnlichen Ionen angenähert. Die numerische Rechnung benutzt die von Hartree (dies. Zbl. **7**, 266) bestimmten Funktionen. Die zweite Näherung ergibt dann die van der Waalssche und Polarisationsenergie. Die Übereinstimmung der gefundenen Werte für Gitterenergie, Atomabstand und Kompressibilität mit den empirischen Werten ist nicht besonders gut. *F. Hund* (Leipzig).

Rudberg, E., and J. C. Slater: Theory of inelastic scattering of electrons from solids. *Physic. Rev.*, II. s. **50**, 150—158 (1936).

Der Stoß eines Elektrons auf ein Metall wird schematisiert als der Zusammenstoß eines freien Elektrons mit einem anderen Elektron, das sich in einem periodischen Potentialfeld bewegt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß mit bestimmter Energieübertragung wird berechnet und stimmt für kleine Werte der übertragenen Energie gut, für höhere Werte dagegen nur sehr ungenau mit der experimentellen Kurve überein. *R. Peierls* (Cambridge).

Landau, L., and E. Lifshitz: On the theory of the photoelectromotive force in semiconductors. *Physik. Z. Sowjetunion* **9**, 477—503 (1936).

Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung der Photoelektronen, die in einem Halbleiter durch eine räumlich veränderliche Lichtintensität unter der gleichzeitigen Wirkung eines elektrischen Feldes entstehen. Im Gleichgewichtsfall verschwindet der Strom, und diese Bedingung bestimmt die Feldstärke und damit die beobachtbare Potentialdifferenz. Diese wird, mit den üblichen Vernachlässigungen der Elektronentheorie der Metalle, sowohl für den Fall reiner Überschußleitung wie für den Fall vergleichbarer Überschuß- und Defektleitung berechnet. *R. Peierls* (Cambridge).

Lifshitz, E.: On the theory of the photoelectromagnetic effects in semiconductors. *Physik. Z. Sowjetunion* **9**, 641—654 (1936).

Die Rechnungen von Landau und dem Verf. (vgl. vorst. Ref.) werden auf den Fall ausgedehnt, daß außer dem Einfluß der Beleuchtung noch ein magnetisches Feld wirksam ist.

R. Peierls (Cambridge).

Mott, N. F.: The electrical resistance of dilute solid solutions. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **32**, 281—290 (1936).

Es wird der Zusatzwiderstand, hervorgerufen durch Fremdatome in fester Lösung in einem Grundmetall, berechnet nach einer Methode, in der die Einzelstreuung am Fremdatom nach dem Faxen-Holtsmarkschen Schema und nicht durch eine Bornsche Störungsrechnung gewonnen wird. Das Verfahren ist anwendbar auf einwertige Metalle, für die sich die Elektronen praktisch wie frei verhalten. Für die Beimischung ebenfalls einwertiger Metalle hängt das Streuvermögen nur von der relativen Lage des tiefsten Wigner-Seitz Eigenwerts in beiden Atomsorten ab. Für Fremdatome anderer Wertigkeit ist die Ionenladung und ihre Abschirmung durch die Leitungselektronen zu berücksichtigen. Letztere wird mit Hilfe der Thomas-Fermi-Methode gewonnen. Die experimentellen Ergebnisse für den Zusatzwiderstand der Legierungen von Cu, Ag, Au miteinander und von verschiedenen anderen Metallen in diesen werden recht befriedigend wiedergegeben.

Nordheim (Lafayette-Indiana).

Honda, Kotarô, und Tokutarô Hirone: Der magnetokalarische Effekt nach der Honda-Ôkuboschen Theorie des Ferromagnetismus. *Z. Physik* **102**, 132—137 (1936).

Der magnetokalarische Effekt ist auf Grund der Thermodynamik mit der Abhängigkeit der Magnetisierung von Feld und Temperatur verknüpft (Honda, vgl. dies. Zbl. **4**, 95). Das Ergebnis wird vom Standpunkt eines Modells diskutiert, das den Ferromagnetismus durch die magnetische Wechselwirkung benachbarter Elementarmagneten erklärt.

F. Hund (Leipzig).

Klassische Theorie der Elektrizität.

Adams, E. P.: The split cylindrical condenser. I. *Proc. amer. philos. Soc.* **76**, 251—267 (1936).

The electrostatic problem is: two equal arcs of a circle are situated symmetrically with respect to the x - and to the y -axis. The configuration is supposed to be infinitely long in the z -direction, the arcs representing the cross-sections of two conducting surfaces, having different potential. The plane $z = x + iy$ is mapped on $w = u + iv$ by means of $w = \log z/c$ and w on t by $dw/dt = A(t^2 - s^2)/\{(t^2 - m^2)(t^2 - n^2)\}^{1/2}$, this being integrated by means of log-expressions. Considering $\chi = \Phi + i\Psi$, with Φ the real potential, the one shell is at a potential $\Phi = V$ and the other at $\Phi = 0$, the sum of the charges of the shells being pos., so that at infinity $\Phi = -\infty$. The connection between χ and t being $d\chi/dt = C(t + s')/\{(t^2 - m^2)(t^2 - n^2)\}^{1/2}$, χ is known and so is Φ and the capacity between the shells, involving a Jacobean elliptic function. The capacity is uniquely determined by the arc-angle of the shells and is independent of the radius of the circle, of which the arcs are part. The surface density of the charge on the shells is calculated from the potential expression. Then the charges on the shells, induced by a uniform outward electric field along the line, joining the centres of the arcs (x -axis). In this case, a potential difference of V is assumed between the shells. The transformation of χ to t is now $d\chi/dt = C(t - s')(t + s'')/\{(t^2 - m^2)(t^2 - n^2)\}^{1/2}$. Here again, a Jacobean elliptic function supplies the solution. As a special case, both shells are assumed to be at zero potential and their charges equal and of opposite sign. The shielding effect of the shells is calculated by obtaining the field strength inside the circle of which the shell-arcs are part and comparing it with the uniform field at a great distance from the origin. Numerical results are given. As a last case, the uniform

outward field is parallel to the y -axis, methods and solution being similar to the above case. Here again, the shielding effect is calculated and numerical values given.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Adams, E. P.: The split cylindrical condenser. II. Proc. amer. philos. Soc. **76**, 269—302 (1936).

As a first problem, a cylindrical conductor of radius b is partly surrounded by a coaxial cylindrical shell of radius a . The basic transformation of $z = x + iy$ (being the coordinates in a perpendicular cross-section of the cylindrical configuration) to $w = u + iv$ is $w = \log z/c$ and of w to t : $dw/dt = A(t-s)/\{(t-r)(t-p)(t-n)(t-m)\}^{1/2}$, where $t = s$ is the edge of the shell and r, p, n, m are the points, where the x -axis meets the cylinder and the two faces of the shell, as we go along the x -axis in a pos. direction. Using a substitution $t = \{p(n-r) - r(n-p) \operatorname{sn}^2 \lambda\} / \{(n-r) - (n-p)\} \operatorname{sn}^2 \lambda$. The

solution is $\Pi = \operatorname{sn} \delta \operatorname{cn} \delta \operatorname{dn} \delta \int_0^\lambda k^2 \operatorname{sn}^2 \lambda \, d\lambda / (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \delta \operatorname{sn}^2 \lambda)$ and $w = -2\Pi + 2(s-p)\lambda / \{(m-p)(n-r)\}^{1/2} + B$. A thetafunction expression for the Jacobean Π -function is provided and by using the rapidly converging ϑ -series numerical calculations are possible. The case, that cylinder and shell have each a given charge and the cylinder and shell have the potentials V and 0 is considered. The transformation of $\chi = \Phi + i\Psi$, Φ being the real potential, to t is given by

$$d\chi/dt = C(t-s') / \{(t-r)(t-p)(t-n)(t-m)\}^{1/2},$$

which yields a solution in terms of Π . The capacity between the conductors, the charge distributions are calculated. As a next problem, the shells are placed in a uniform outward field, the field strength being parallel to x , the axis joining the centres of shell and cylinder. Substitution of χ to t is given by

$$d\chi/dt = C(t-s')(t-s'') / \{(t-r)(t-p)(t-n)(t-m)\}^{1/2}$$

and a solution obtained in terms of Π . Charge distributions and potentials are calculated for some assumptions relating to total charge on shell and cylinder and to the potentials of these surfaces. Next, a cylinder surrounded by two equal coaxial symmetrically situated shell-arcs is considered, transformations being similar to the ones used previously. Again the different cases, including an outward uniform field are treated separately. As a third problem, to coaxial shell arcs, similar to paper I, but of unequal arcs, are considered. Transformations of w to t are similar, leading up to a Π_1 -function similar to the Π above. Again, the different cases are treated at length. As a last problem, the two shell arcs of unequal extension are taken to ly on the same side of the y -axis, symmetrically to x , inside each other and complete solutions given for this case.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Schott, G. A.: The electromagnetic field due to a uniformly and rigidly electrified sphere in spinless accelerated motion and its mechanical reaction on the sphere. I. Proc. Roy. Soc. London A **156**, 471—486 (1936).

Schott, G. A.: On the spinless rectilinear motion of a uniformly and rigidly electrified sphere. II. Proc. Roy. Soc. London A **156**, 487—503 (1936).

Verf. befaßt sich mit einigen Fragen der klassischen Elektrodynamik in der Hoffnung, die Resultate auf Probleme der Kernphysik anwenden zu können. In I wird das Feld einer starr elektrisierten Kugel (Modell eines β -Teilchens!) bestimmt, die sich ohne Rotation beliebig bewegt. Die Formeln werden auf geradlinige gleichförmige und hyperbolische ($x^2 - c^2 t^2 = \text{konst.}$) Bewegung spezialisiert. In II wird die mechanische Rückwirkung auf die Kugel des durch dieselbe bei geradliniger Bewegung erzeugten Feldes berechnet. Die Spezialfälle einer gleichförmig beschleunigten und einer hyperbolischen Bewegung sowie einige Fälle einer unstetigen Bewegung werden diskutiert. — I und II bilden die ersten Arbeiten einer vom Verf. geplanten Serie. *Fock*.

Becker, R.: Bemerkungen zur Messung der Permeabilität mit Hilfe des Hauteffektes. Ann. Physik, V. F. 27, 123—128 (1936).

Bei der Messung der Permeabilität mit Hilfe des Hauteffektes kann man als Meßgröße den Wechselstromwiderstand oder die innere Selbstinduktion pro Längeneinheit eines Drahtes nehmen. Bei Benutzung der einen Meßgröße ergibt sich ein anderes Ergebnis als bei Benutzung der anderen. Verf. geht von den Maxwell'schen Gleichungen des Hauteffektes aus und nimmt dabei als Beziehung zwischen magnetischer Induktion und magnetischer Feldstärke eine Hystereseschleife von quadratischer Form, wie sie Lord Rayleigh vorgeschlagen hat, an. Hieraus ergibt sich dann im Falle eines sinusförmigen Wechselstromes eine komplexe Permeabilität, welche linear mit der absoluten Größe der magnetischen Feldstärke zusammenhängt. Hieraus entsteht dann eine nichtlineare Differentialgleichung für die magnetische Feldstärke im Leiterquerschnitt (Oberflächenschicht), wobei das nichtlineare Glied klein ist gegenüber den anderen Gliedern. Die Integration gelingt also näherungsweise. Zum Schluß diskutiert Verf. einige Meßergebnisse im Lichte der Rechnung, ohne jedoch zu einem endgültigen Entschluß zu kommen.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Stefanescu, Sabba S.: Lignes de champ magnétique autour d'une ramification de courants. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 6, 171—176 (1936).

L'auteur étudie un branchement de courants électriques, dit en T , comprenant un courant d'intensité $n_1 + n_2$, arrivant en o suivant l'axe ox et dirigé vers l' x négative, se divisant en o en deux autres courants d'intensités n_1 et n_2 suivant l'axe oy et l'axe $o(-x)$, les axes x et y ayant un angle droit. Il cherche les lignes de force magnétique sur une sphère de rayon 1 autour o et les représente par l'intersection de cette sphère avec une famille de cylindres. Les projections des lignes de force sur le plan du branchement se déduisent les unes des autres par dilatation proportionnelle des ordonnées Y dans le système d'axes OXY . Il suffit de construire une seule de ces projection pour avoir les projections de toutes les autres lignes. Deuxièmement l'auteur étudie les cas, où les lignes de champs magnétiques d'une ramification de courants électriques sont algébriques. Ceci comporte que les nombres n_p indiquant la force des courants sont rationnels à un facteur commun près. Le degré des lignes magnétiques algébriques est indépendant de l'orientation des rayons qui constituent une telle ramification. Les cas les plus simples, comportant un fil deux fils et trois fils de courant sont examinés. Quelques théorèmes relatifs aux lignes magnétiques sont déduits pour ces cas.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Maggi, G. A., e B. Finzi: Una questione relativa alle onde elettromagnetiche armoniche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 200—202 (1935).

Ts'en, Mong-Kang: Differential indicial admittances: Currents produced by unit differential pulse voltage. Chin. J. Physics 2, 43—75 (1936).

A unit function is a quantity, zero before $t = 0$ and unity after $t = 0$ and shall be denoted by $1_0(t)$. The current in a circuit, produced by a unit voltage function of t is termed the indicial admittance of the circuit. A voltage function, zero before $t = 0$, unity between $t = 0$ and $t = d$ and zero after $t = d$ may be represented by the difference of two unit voltage functions $1_0(t) - 1_d(t)$ in an obvious way. The current produced in a circuit by such a voltage is called differential indicial admittance of the circuit. By the method of superposition, obviously the differential indicial admittance may be calculated by taking the difference of two indicial admittances of the same circuit, spaced in time by d . As the fundamental characteristics of any differential indicial admittance, which, as a function of t generally consists of one or several transient oscillations, the author takes: the number of oscillations (pulses), the duration of the pulses, the maximum positive or negative amplitude of the pulses, the times at which the maximum amplitudes occur. A number of circuits are examined as to differential indicial admittance for a unit voltage pulse of duration d , by using the superposition principle. For every circuit case, an illustration of the circuit, graphs of the

component and resulted differential indicial admittances, characteristics of these admittances according to the above mentioned scheme and some explanatory notes are given. As elementary circuits, a resistance a capacity and an inductance are treated. Then combinations of two such elements in series, making three cases in all, where the case of inductance and capacity in series is considered for different tunings of this combination. Next a circuit comprising inductance capacity and resistance in series is treated for different tunings and damping decrement values. Then a coupled circuit with a primary having inductance, mutual inductance and resistance in series and a similar secondary is taken. Next, there are combinations of two and three elements (inductance, capacity and resistance) in parallel. Then a resistance parallel to a resistance and a capacity in series, etc. Finally, a series combination of two elements in parallel to a series combination of two more elements. *Strutt* (Eindhoven).

Carter, F. W.: Note on surges of voltage and current in transmission lines. Proc. Roy. Soc. London A 156, 1—5 (1936).

Verf. geht aus von der bekannten Telegraphengleichung, wobei sowohl der Widerstand als die Ableitung zwischen den einzelnen Leitern in Betracht gezogen werden. Die Berechnung wird in der symbolischen Weise nach dem Vorgang Heavisides durchgeführt, wobei auf die Linie ein Spannungsstoß gegeben wird (Spannung plötzlich um einen konstanten Betrag erhöht am Anfang der Linie). Die Berechnung führt zu einem Ausdruck mit einer Doppelsumme für die Stromstärke in jenem Punkt der Leitung und zu einer ebensolchen Doppelsumme für die Spannung. Verf. erwähnt, daß die Spannungs- und Stromverläufe, welche durch einen noch allgemeiner angenommenen Spannungsstoß am Leitungsanfang verursacht werden, leicht mit Hilfe der behandelten Methode in Form eines bestimmten Integrales erhalten werden können. Bei der Anwendung der Lösung auf Blitzentladungen auf Freileitungen kann der Verlauf von Spannung und Strom jedoch nur in allgemeiner Form erschlossen werden, da die Größe von Widerstand und Ableitung infolge des Skineffektes und des Coroneffektes mit der Frequenz stark zusammenhängen werden. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Lee, Y. W., and S. H. Chang: Electric network parametric transforms; examples. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A 3, 417—425 (1936).

Zwischen Paaren gewisser Komponentenfunktionen eines elektrischen Zweipols, der als Funktion der komplexen Frequenzvariablen geschrieben wird, z. B. zwischen Real- und Imaginärteil oder Modul und Phase, bestehen im allgemeinen eindeutige Beziehungen vermittelt der Poissonschen Integraldarstellung. Durch Einführung geeigneter Frequenztransformationen lassen sich diese Beziehungen in solche zwischen den Fourierkoeffizienten von Entwicklungen der Komponentenfunktionen umschreiben.

Besonders einfache Beziehungen liefert die Transformation $\omega = k \cdot \tan \frac{\vartheta}{2}$ (ω = Winkel-frequenz, k = positive Konstante), die zu Fourierentwicklungen in ϑ führt. Für diese wird die Güte der Konvergenz numerisch untersucht, und zwar für den Wellenwiderstand eines homogenen Kabels. Die Konvergenz hängt, wie zu erwarten, ziemlich stark von der Art der Komponente ab und zeigt eine Art Gibbssches Phänomen; die zwölfgliedrige Näherung ist z. B. ganz unzureichend für die Phase, genügt dagegen für den Modul im mittleren Frequenzbereich sowie für die Reaktanz und noch mehr für die Admittanz, wenn man die tiefen Frequenzen ausschließt. D. h. im allgemeinen ist die Konvergenz der Methode schlecht, wo die Frequenzfunktionen „rasch veränderlich“ sind. *Baerwald* (Tomsk).

Seletzky, Anatoli C.: Circular loci of currents and voltages in a general network. J. Franklin Inst. 222, 197—209 (1936).

Die Ortskurven von Strömen und Spannungen eines elektrischen Netzwerkes bei Variation eines Zweipolelements (Selbstimpedanz) sind Kreise. Verf. gibt numerische Beispiele. *Baerwald* (Tomsk).

Klassische Optik.

Slevogt, Hermann: Über einen Fall von Bildfeldwölbung bei der Abbildung durch Zylinderlinsen. *Z. Instrumentenkde* **56**, 405—406 (1936).

Picht, Johannes: Bemerkungen über den Phasenunterschied im Bilde der Fraunhofersehen Beugungserscheinungen. *Z. Instrumentenkde* **56**, 363—368 (1936).

Man habe ein Gitter aus Streifen von der Breite b und b' , die Gitterkonstante ist also $a = b + b'$. Die Zahl der b Streifen sei N oder $N + 1$ (allgemein \bar{N}), die der b' Streifen N . Ferner die Durchlässigkeit der b Streifen D^2 , die Phasenvergrößerung durch sie Φ , entsprechend D'^2 und Φ' , ferner $D'/D = D_r$, $\Phi' - \Phi = \Delta\Phi$. — Das Gitter werde von einer ebenen Welle senkrecht durchsetzt, hinter ihm befinde sich ein Objektiv, dessen Achse senkrecht zur Gitterebene liege. Der Schnittpunkt M der Achse mit der Gitterebene habe von einem Rande des Gitters den Abstand $(N_1 - 1)a - d$ [N_1 positive ganze Zahl, $0 \leq d \leq a$]. Es sollen die Beugungsbilder in der Brennebene des Objektivs untersucht werden. Die unter dem Winkel γ abgeugten Lichtstrahlen mögen sich im Punkte F_γ der Brennebene treffen. Der optische Lichtweg von M durch die Linse, \overline{MLF}_γ ist von γ abhängig, für alle Strahlen mit dem nämlichen γ aber fest. Durch Integration über alle Streifen erhält P. die Lichtfunktion u_{F_γ} in F_γ ; er formt den Ausdruck um, in dem er \overline{MLF}_γ durch die Brennweite des Objektivs f' und die Vergrößerung β' in M ausdrückt, einige konstante Faktoren werden weggelassen. Der Ausdruck für u_{F_γ} zeigt, daß die Beugungsbilder für $\sin \gamma = m \frac{\lambda}{a}$ entstehen, wo $m = 0, \pm 1, \pm 2$ ist. Die allgemeine Formel für das m -te Beugungsbild wird für $\bar{N} = N(N_1 + N_2 + 1 = N$ gesetzt):

$$u_{F_m} = (-1)^{m(N_2 - N_1)} e^{im\pi \left(\frac{b-2d}{a} - m \frac{f'}{\beta' \cdot a^2} \cdot \frac{\lambda}{a^2} \right)} N \left\{ b \frac{\sin \left(m\pi \frac{b}{a} \right)}{m\pi \frac{b}{a}} + (-1)^m D_r e^{i\Delta\Phi} b' \frac{\sin \left(m\pi \frac{b'}{a} \right)}{m\pi \frac{b'}{a}} \right\}.$$

P. beschränkt sich dann auf den Fall $b = b' = \frac{a}{2}$ und behandelt besonders drei Unterfälle: 1) $D_r = 0$ (reines Amplitudengitter); 2) $D_r = 1, \Delta\Phi = \frac{\pi}{2}$; 3) $D_r = 1, \Delta\Phi = \pi$ (zwei Arten reiner Phasengitter).

$$1) u_{F_m} = (-1)^{m(N_2 - N_1)} N \frac{a}{2} \frac{\sin m \frac{\pi}{2}}{m \frac{\pi}{2}} e^{im\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{2d}{a} - m \frac{f'}{\beta' \cdot a^2} \cdot \frac{\lambda}{a^2} \right)},$$

$$2) u_{F_m} = (-1)^{m(N_2 - N_1)} N \frac{a}{2} \sqrt{2} \frac{\sin m \frac{\pi}{2}}{m \frac{\pi}{2}} e^{im\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{2d}{a} - m \frac{f'}{\beta' \cdot a^2} \cdot \frac{\lambda}{a^2} \right)} e^{(-1)^m i \frac{\pi}{4}},$$

$$3) u_{F_m} = (-1)^{m(N_2 - N_1)} N a \frac{\sin m \frac{\pi}{2}}{m \frac{\pi}{2}} e^{im\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{2d}{a} - m \frac{f'}{\beta' \cdot a^2} \cdot \frac{\lambda}{a^2} \right)} \quad (m \text{ ungerade}),$$

$$u_{F_m} = 0 \quad (m \text{ gerade}).$$

$$\frac{\sin m \frac{\pi}{2}}{m \frac{\pi}{2}} = 1 \text{ für } m = 0; \quad 0 \text{ für } m \neq 0, \text{ gerade}; \quad (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2}{m\pi} \text{ für } m \text{ ungerade}.$$

Danach verschwinden in allen drei Fällen die Bilder gerader Ordnung mit Ausnahme des nullten, im dritten Falle auch dieses. Der Phasenunterschied zwischen dem nullten und ersten Bilde wird:

$$1) \pi \left(N_2 - N_1 + \frac{1}{2} - \frac{2d}{a} - \frac{f'}{\beta' \cdot a^2} \cdot \frac{\lambda}{a^2} \right) \quad 2) \pi \left(N_2 - N_1 + \frac{1}{2} - \frac{2d}{a} - \frac{f'}{\beta' \cdot a^2} \cdot \frac{\lambda}{a^2} - \frac{1}{2} \right).$$

Der Phasenunterschied zwischen dem m -ten und $m + 2$ -ten Bilde (m ungerade) ist in allen drei Fällen

$$-4\pi \left[\frac{d}{a} + (m+1) \frac{f'}{\beta'} \cdot \frac{\lambda}{a^2} - \frac{1}{4} \right] \quad \left(-\frac{1}{4} \text{ fehlt bei P.} \right),$$

also nicht konstant, sondern von m abhängig. Das Phasengitter $\Delta\Phi = \pi$ wird noch besonders untersucht, sowohl für $\bar{N} = N$ wie für $\bar{N} = N + 1$ und für verschiedene Werte von N .

Hans Boegehold (Jena).

Barreca, P.: Sur la diffraction par un corps de révolution, éclairé selon son axe par une source lumineuse punctiforme. (Cas d'un corps noir, dans le vide, et d'une source de lumière monochromatique, à rayonnement identique dans toutes les directions.) Arch. Sci. Physiques etc. 18, 88—99 (1936).

Rigorous classical solution of the wave equation for the special cases mentioned above.

M. Herzberger (Rochester).

Ewald, P. P., und E. Schmid: Die optische und die Interferenz-Totalreflexion bei Röntgenstrahlen. I. Z. Kristallogr. A 94, 150—164 (1936).

Die optische und die Interferenz-Totalreflexion der Röntgenstrahlen werden definiert und aus allgemeinen Betrachtungen an Hand der Dispersionsfläche in ihrem Zusammenhang qualitativ anschaulich aufgeklärt. Die Fresnelsche Lösung des Problems der Reflexion des Lichtes (oder der Röntgenstrahlen) an einer einzigen Oberfläche wird begrifflich neu diskutiert und ihr Wert darin gefunden, daß sie eine Hilfslösung für das Problem der Kristallplatte (mit zwei Grenzflächen) ist. *V. Fock.*

Schmid, Erich: Die optische und die Interferenz-Totalreflexion bei Röntgenstrahlen. II. Z. Kristallogr. A 94, 165—196 (1936).

Die in der voranstehend referierten Arbeit gegebenen qualitativen Betrachtungen werden quantitativ verwertet. — Die Lösung des Fresnelschen Problems kann in der Röntgenoptik beim Auftreten zurückreflektierter Strahlen (Braggfall) so gefunden werden, daß bei der Lösung des Problems für eine Kristallplatte die Randbedingungen an der unteren Grenze weggelassen werden; die Bestimmtheit der Lösung wird durch eine Verringerung der Zahl der Elementarfelder erreicht. Die bei fast streifendem Einfall auftretende „optische“ Totalreflexion läßt sich als symmetrischer Braggfall nullter Ordnung auffassen; die Fresnelschen Formeln der Lichtoptik werden verallgemeinert. Es wird die Wechselwirkung zwischen optischer und Interferenzreflexion untersucht und die Intensitätsfrage diskutiert. Zum Schluß wird ein Beispiel unter Berücksichtigung der Absorption numerisch durchgerechnet.

V. Fock (Leningrad).

Dosse, J.: Zeichnerische Ermittlung der Elektronenbahnen im Magnetfeld. Z. techn. Physik 17, 315—318 (1936).

Das elektronenoptische Brechungsgesetz läßt sich auch zur Bestimmung der Bahnen in magnetischen Feldern benutzen, wenn man das von C. Störmer bei seinen Nordlichtarbeiten eingeführte magnetische Potential, welches außer von den Feldgrößen noch von dem Drehimpuls des Elektrons um die Achse abhängt, verwendet. Verf. erläutert das Verfahren der zeichnerischen Bestimmung der Bahnen, bei dem eine Schar von Potentialflächen herausgegriffen und an ihnen der Strahl gebrochen wird, für die einfachsten magnetischen Linsen, das homogene Magnetfeld und das Feld des stromdurchflossenen kreisförmigen Leiters.

Henneberg (Berlin).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Milankovitch, M.: Über das Problem der Polverlagerungen. (Athènes, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 147—151 (1935).

Zwei kurze und übersichtliche Herleitungen der bekannten Vektorgleichung $v = x \text{ grad } \Omega$ des Verf., die die säkulare Verlagerung des Rotationspols auf der Erdoberfläche darstellt.

Hopfner (Wien).

Heek, N. H.: The earthquake problem. *Scientia* 60, 136—142 (1936).

Shoulejkin, W. W.: Refraction of waves on continental shoal. *Bull. Acad. Sci. URSS*, VII. s. Nr 10, 1355—1368 u. engl. Zusammenfassung 1368—1370 (1935) [Russisch].

Contains an application of the formula

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tg} \operatorname{hyp} \left(2\pi \frac{H}{\lambda} \right) \quad (1)$$

(c = wave-velocity, λ = wave-length, H = depth) to the question of refraction of waves on continental shoal. The index of refraction $\mu = c_\infty/c$ (c_∞ = wave-velocity in the case of the infinite depth), which characterises the layer of water of a given depth is introduced into the sea-wave cinematics and the differential equation of "the beam"

drawing the way of waves in shallow water, namely $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 - 1}$ (y, x = coordinates, σ = parameter the value of which is determined by the boundary conditions) is constructed. The numerical integration is fulfilled for the case of the linear growth of the depth and the possibility of application of the formula (1) (which is exact only for the case of constant depth) is discussed.

I. Kiebel (Leningrad).

Conforto, Fabio, e Tullio Viola: Sul calcolo di un integrale doppio che interviene nella determinazione della profondità degli ipocentri sismici. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* 2, 161—198 (1936).

Für die Tiefenbestimmung der Herde eines Erdbebens, unter besonderen Vereinfachungen (ebene Erdoberfläche, punktförmige Herde, ...), wurde G. Andreotti zur Berechnung folgenden Integrals:

$$E_{r_0}(\nu) = \int_{r_0}^r d\nu \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\sqrt{K}(\nu + a \cos \vartheta - a \sqrt{K})^2}, \text{ mit } K = (a\nu + \cos \vartheta)^2 - (a^2 - 1)(\nu^2 - \nu_0^2),$$

geführt, das den zeitlichen Zuwachs der gesamten seismischen Energie in einem beliebigen Punkt (Station) der Erdoberfläche darstellt. Zweck dieser Arbeit ist die numerische Berechnung von E . Diese wurde mit den Formeln für die numerischen Quadraturen von Cavalieri-Simpson und von Gauß durchgeführt, wofür die Überlegenheit der letzten Formel klar zum Ausdruck kam. Gleichzeitig haben die Verf. das Integral E auf die elliptischen Integrale von Legendre reduziert und bewiesen, daß es möglich war, die Tafeln von Legendre zu benutzen. Die Übereinstimmung der Resultate nach diesem Verfahren mit denjenigen nach der Formel von Gauß ist gut gewesen. — Die Ergebnisse der Arbeit sind in zwei graphischen Tafeln und in einer Tabelle wiedergegeben.

Bossolasco (Turin).

Størmer, Carl: On the trajectories of electric particles in the field of a magnetic dipole with applications to the theory of cosmic radiation. V. *Astrophys. Norvegica* 2, 1—122 (1936).

Das Programm des Verf. ist die numerische Berechnung einer genügenden Zahl von Bahnkurven geladener Teilchen in einem magnetischen Dipolfeld, um eine vollständige Übersicht über die Verteilung der kosmischen Strahlen auf der Erdoberfläche zu erhalten. In der vorliegenden 5. Mitteilung werden zwei Bündel von je über 100 Bahnkurven, die im Unendlichen Asymptoten parallel bzw. senkrecht zur Dipolachse haben, untersucht. In einer Serie von Tabellen und graphischen Tafeln wird ihre Verteilung und Ankunftsrichtung auf der Erdoberfläche gegeben, und zwar für eine Reihe verschiedener Erdradien (d. h. Energien bzw. $H\varrho$ -Werten). Die Rechenmethode wird ausführlich erläutert und die einzelnen Bahntypen geometrisch diskutiert. Später sollen weitere Bündel mit Winkeln bezüglich von 100° , 110° zu 170° zur Dipolachse behandelt werden. (IV. vgl. dies. Zbl. 12, 94.)

Nordheim (Lafayette-Indiana).

Goldsbrough, G. R.: The tidal oscillations in an elliptic basin of variable depth. II. Proc. Roy. Soc. London A 155, 12—32 (1936).

Die langen Wellen in einem Becken von der Form eines elliptischen Paraboloids werden betrachtet unter Berücksichtigung der Erdrotation. Die Bewegung wird, wie üblich, als quasistatisch angenommen. Durch Elimination der Geschwindigkeitskomponenten aus der Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der Bewegungsgleichungen ergibt sich eine Riemannsche Differentialgleichung für die Vertikalerhebung ζ , die vier verschiedene Typen von Lösungen hat. Die Grenzbedingung, daß ζ endlich ist am Rande des Beckens, ist erfüllt, wenn die Lösungen der Differentialgleichung im wesentlichen Polynome sind. Damit die unendlichen Reihen, welche die Lösungen der Riemannschen Gleichung darstellen, sich auf Polynome reduzieren, muß ein unbestimmter Parameter σ für den ersten und vierten Typus ganzzahlig sein, $\sigma = m$, für den zweiten und dritten Typus muß sein $\sigma = m + \frac{1}{2}$. Zunächst werden gewisse Eigenschaften der Lösungsfunktionen diskutiert. Dann werden die Ausdrücke für die allgemeine Lösung des Problems gegeben. Für die niedrigsten Perioden lassen sich die Ausdrücke für die Lösungen leicht hinschreiben und diskutieren. Als Beispiele werden einige Linien gleicher Gezeit in Figuren dargestellt. In zwei Fällen bewegen sich die Linien im Sinne der Rotation, in den beiden anderen Fällen im entgegengesetzten Sinne.

B. Haurwitz (Toronto).o.

● **Isvekov, B. I., und N. E. Kotschin:** Dynamische Meteorologie. Bd. 1. Leningrad: 1935. 351 S. [Russisch].

Tome premier d'un cours de météorologie dynamique. Oeuvre collectif de cinq auteurs (Isvekov, Kiebel, Kotschin, Kotschina, Davtjan). Contient non seulement les matériaux ordinaires, mais aussi les résultats des recherches de l'école du Friedmann. — Ch. I. Introduction historique. Ch. II. Les principes généraux de mécanique de l'atmosphère. — Dans ce chapitre la déduction des équations de l'hydrodynamique et l'introduction des forces et des notions „barotrope“ et „barocline“ sont faites. L'analyse de „l'ordre de grandeur“ (les tables des Hesselberg et Friedmann) des éléments météorologiques et quelques classifications des mouvements atmosphériques sont données. Ch. III. Thermodynamique de l'atmosphère. — Une déduction exacte et détaillée de l'équation de l'axeux d'énergie. Les changements adiabatiques de l'état de l'atmosphère. Les „papiers adiabatiques“ diverses. Les considérations générales sur l'énergétique de l'atmosphère. Ch. IV. Energie radiante. — Les recherches de Gold, Roberts, Simpson, Albrecht, Friedmann et d'autres sont systématiquement exposées ici. Ch. V. La variation avec hauteur de la température et de la pression dans l'atmosphère libre. — La statique de l'atmosphère est exposée, aussi bien que les résultats nouveaux de Kotschin sur les changements (adiabatiques ou non) d'état d'une colonne verticale de l'air. Une théorie du géopotential et une classification des inversions sont données. Ch. VI. Cinématique des mouvements atmosphériques. — A par de matériaux ordinaires une classification des singularités des lignes du courant non seulement plan mais aussi dans l'espace est donnée. L'exposition de la méthode de Margules-Bjerknes (pour la construction de la vitesse verticale) est suivie par analyse de son applicabilité (recherches de Wasiliev). La théorie d'impétuosité du vent (Friedmann) basée sur la considération de „vortex-streets“ de Kármán est donnée. Ch. VII. Dynamique de l'atmosphère (hydrodynamique d'un fluide idéal). — La notion du vent gradient et la démonstration du théorème de Bjerknes. Une déduction exacte des conditions de Friedmann pour la conservation des lignes vectorielles du vecteur A ($\text{helm} A \times A = 0$ avec $\text{helm} A = \frac{dA}{dt} - A \cdot \nabla V + A \nabla \cdot V$, V = vitesse) aussi

bien que des intensités de ses tubes vectoriels ($A \cdot \text{helm} A = 0$). Les conditions de la possibilité dynamique du mouvement (Friedmann) (c. à d. les conditions qui doivent être imposées aux composantes des vitesses pour que l'on puisse déterminer ensuite la pression et la densité) et ses applications diverses; les mouvements adiabatiques suivis par une formation des tourbillons (Kotschin); modèle théorique d'un cyclone qui se déplace dans un fluide idéal compressible (Kotschin). Une considération de variation du vent (fluide idéal) avec hauteur dans le cas du gradient barique variable (Troizky). J. Kiebel (Leningrad).

Gião, Antonio: Le problème des perturbations atmosphériques. Son examen à la lumière de la mécanique des fluides, de la thermodynamique et de la théorie des champs. Beitr. Physik frei. Atmosph. 23, 208—237 (1936).

Der Autor sucht zunächst zu beweisen, daß atmosphärische Störungen keine „unendlich kleinen Störungen“ sein können, wie in vielen Arbeiten der Norwegischen

Meteorologenschule angenommen wird. Bezeichnen \mathfrak{B} und v die Geschwindigkeiten der Grund- und Störungsbewegung, so muß bei unendlich kleiner Störung gelten

$$\lim_{\mathfrak{B} \cdot \nabla v_x \rightarrow 0} \frac{v \cdot \nabla v_x}{\mathfrak{B} \cdot \nabla v_x} = 0.$$

Durch eine Rotation des Koordinatensystems kann ∇v_x in irgendeinem Punkte normal zu \mathfrak{B} gemacht werden. Weiter schließt Verf. auf Orthogonalität von v und ∇v_x und somit auf Zusammenfallen der Stromlinien von Grund- und Störungsbewegung. Da dies offenbar absurd ist, sollen unendlich kleine Störungen einer Grundströmung unmöglich sein. Die Unmöglichkeit von Wellenstörungen, wie sie durch synoptische und theoretische Arbeiten der Norwegischen Meteorologenschule nachgewiesen wurden, wird folgendermaßen dargetan. Die Vertikalkomponente der Bewegung bleibt unberücksichtigt. Die a priori wellenförmig angenommenen Störungen sollen für sich allein die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen befriedigen im Gegensatz zur sonstigen Arbeitsweise der Hydrodynamik. Dann wird aus den nunmehr sehr vereinfachten Störungsgleichungen die Grundbewegung ermittelt, die sich als Wellenbewegung von gleicher räumlicher Struktur wie die Störungsbewegung ergibt, woraus die Unmöglichkeit von Wellenstörungen folgt. Weiter wird gezeigt, daß Wirbelstörungen möglich sind. Im zweiten Kapitel werden einige thermodynamische Beziehungen abgeleitet zwischen Größen der Grundströmung und der Störungsbewegung. Im dritten Kapitel wird gezeigt, wie aus des Verf. Theorie der Felder die Notwendigkeit von Störungen folgt. Es wird abgeleitet, daß ein permanentes Feld eine harmonische Funktion sein muß, was Gelegenheit gibt, einen früheren Einwand gegen die Theorie der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre von Wehrlé und Dedebant zu widerholen.

B. Haurwitz (Toronto).

Hristow, Wl. K.: Potenzreihen zwischen den konformen ebenen Koordinaten und den geographischen Koordinaten und umgekehrt, angesetzt für einen beliebigen Anfangspunkt. Z. Vermessgswes. 65, 529—536 (1936).

Es werden Potenzreihen entwickelt, die dazu dienen, aus den geographischen Koordinaten eines Ellipsoidpunktes isometrische ebene Koordinaten abzuleiten und umgekehrt. Um möglichst viele Sonderfälle der gebräuchlichen Koordinatentransformationen gleichzeitig zu erledigen, werden die Reihen in sehr allgemeiner Form mit komplexen Koeffizienten und komplexen Argumenten angesetzt; auch die Anfangspunkte der Koordinatensysteme werden nicht von vornherein festgelegt, sondern ihre Koordinaten als Veränderliche in die Ableitungen einbezogen. Je nachdem, wie man die Koordinaten der Systemnullpunkte in die Entwicklungen einführt, ergeben sich im wesentlichen zwei Wege für die allgemeingültigen Reihen, die beide durchgerechnet werden, wobei z. T. auf frühere Veröffentlichungen des Verf. verwiesen wird. Als numerisches Beispiel werden geographische Koordinaten in Gaußsche ebene Koordinaten verwandelt und diese zurückverwandelt.

Schmehl (Berlin).

Vasiliu, Gh. Gh.: Zur Theorie rechtwinkliger geodätischer Koordinaten. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 6, 176—191 (1936).

Zur Berechnung rechtwinkliger Koordinaten auf dem Umdrehungsellipsoid sind von Helmert und von Schreiber geeignete Formeln bis zu den Gliedern fünfter Ordnung entwickelt worden. Verf. benutzt als Ausgang zur Berechnung rechtwinkliger geodätischer Koordinaten die Reduktionsformeln des geodätischen Dreiecks, das aus drei geodätischen Linien gebildet wird, auf das ebene Dreieck. Die Formelrechnung wird sehr ausführlich mitgeteilt.

Schmehl (Berlin).

Reek, W.: Zur Schnittberechnung mittels der „Hamann-Vollautomat“-Rechenmaschine. Allg. Vermessg-Nachr. 48, 428—431 (1936).

Reek, W.: Erweiterte Schnittformel mit Beispielen für ihre Anwendung aus der Praxis. Allg. Vermessg-Nachr. 48, 501—506 (1936).